

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 9

להגשה עד 21.1.20

שאלה 1

נניח $X = Y = \mathbb{R}$, ונביט ב- \mathbb{R}^2 ביחס לסיגמא-אלגברת בורל. נגדיר את הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \wedge x \leq y < x + 1 \\ -1 & x \geq 0 \wedge x + 1 \leq y \leq x + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי $\iint f(x, y) dm(x) dm(y) \neq \iint f(x, y) dm(y) dm(x)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

שאלה 2

תהי $A \subseteq [0, 1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא-אלגברת המכפלה) עם $m_2(A) = 1$ (כאשר m_2 היא מידת המכפלה). הראו כי כמעט לכל $x \in [0, 1]$ מידת לבג (הרגילה) של הקבוצה $S_x(A) = \{y : (x, y) \in A\}$ היא 1.

שאלה 3

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dm(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

הוכיחו כי $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. הדרכה: חשבו קודם את I^2 ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות.

שאלה 4

חשבו את האינטגרל

$$\int_0^1 \int_0^\infty \frac{y \cdot \arctan(xy)}{(1+x^2y^2)(1+y^2)} dm(x) dm(y)$$