הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגולים 7+8

הפונקציה האופיינית

הגדרה:

הפונקציה האופיינית של מ"מ X היא $\varphi_X(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]$.

איך מחשבים אותה?

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\,dF_X(t)$$

אם ל-X יש פונקציית צפיפות f_X, אז

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} f_X(t)\,dw$$

תרגיל:

חשבו את $\varphi_X(t)$ עבור $X\sim U[-1,1]$ ועבור $X\sim Geo(p)$.

פתרון:

$X\sim U[-1,1]$:

$$\varphi_X(t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\,dx=\frac{1}{2}\left.\frac{e^{itx}}{it}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{2it}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=\frac{\sin t}{t}$$

$Y\sim Geo(p)$:

$$\varphi_Y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p\,e^{int}=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-p)e^{it}\right)^n=$$

$$=\frac{p}{\cancel{1-p}}\cdot\frac{\cancel{(1-p)}e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}=\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

$|(1-p)e^{it}|=1-p<1$

$p\neq 0$

תכונות של φ_X:

1. $|\varphi_X(t)|\le 1$.
2. אם X ו-Y הם ב"ת, אז $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
3. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\varphi_{aX+b}(t)=e^{itb}\varphi_X(at)$.
בפרט $\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)}$.
4. φ_X רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.
5. φ_X פונקציה ממשית $\iff$ X מ"מ סימטרי (כלומר $P(X>x)=P(X<-x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$)
6. φ_X קובעת את ההתפלגות של X.

תרגיל:

הראו שלא קיימים מ"מ בתש"ה X ו-Y כך ש-$X-Y\sim U[-1,1]$.

פתרון:

נניח בשלילה שקיימים.

$$\frac{\sin t}{t}=\varphi_{U[-1,1]}(t)=\varphi_{X-Y}(t)\underset{\text{אי-תלות}}{=}\varphi_X(t)\cdot\varphi_{-Y}(t)\underset{\text{תכונה 3}}{=}\varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)}\underset{\text{שוי התפלגות}}{=}|\varphi_X(t)|^2$$

אבל הפונקציה $\frac{\sin t}{t}$ יכולה להיות גם שלילית, בסתירה.

תרגיל:

יהיו $X_1,X_2,\dots,X_n$ ממב"ת בעלי התפלגות קושי סטנדרטית, כלומר

$$f_X(t)=\frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. הוכיחו כי $\frac{S_n}{n}$ מתפלג גם הוא קושי סטנדרטית.

הוכחה:

נחשב את $\varphi_{X_i}(t)$. נסמן $X = X_i$ מ"מ שמתפלג קושי סטנדרטי.
נשתמש בנוסחת ההיפוך:

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}\varphi_X(\omega)\,d\omega$$

נסתכל על g המ"מ עם התפלגות $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. הפונקציה האופיינית שלו היא

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}e^{-itx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-(1+it)x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{-(it-1)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{e^{-(1+it)x}}{-(1+it)}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\left.\frac{e^{-(it-1)x}}{-(it-1)}\right|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{-1-it} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-it} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}+\frac{1}{1-it}\right) = \frac{1}{1+t^2}$$

לפי משפט ההיפוך,

$$\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\varphi_X(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ סימטרי}}}{=} \frac{1}{2}\varphi_X(x)$$

$\Leftarrow$ $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{1}{n}t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1,\dots,X_n \text{ בת"ל}}}{=} \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left(e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n = e^{-|t|}$$

ולכן $\frac{S_n}{n}$ מתפלג קושי סטנדרטי.

תרגיל:

יהי X מ"מ. אם $\mathbb{E}[|X^n|]<\infty$, אז $\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)$ קיימת לכל $t\in\mathbb{R}$, ומתקיים

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{itX}(iX)^n\right]$$

בפרט $\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(0)=i^n\cdot\mathbb{E}[X^n]$.

הוכחה:

נוכיח עבור $n=1$. לפי הגדרת הנגזרת,

$$\varphi_X'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot\frac{e^{ihX}-1}{h}\right]=(*)$$

לפי משפט ההתכנסות הנשלטת, כיוון ש- $\left|\frac{e^{ihX}-1}{h}\right|\le|X|$,
אפשר להכניס את הגבול לתוחלת ונקבל

$$(*)=\mathbb{E}\left[\lim_{h\to 0}e^{itX}\cdot\frac{e^{ihX}-1}{h}\right]=\mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot iX\right]$$

$\square$

הערה:

ל-n-ים זוגיים, אם $\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(0)$ קיימת אז קיים המומנט ה-n,
ל-n-ים אי-זוגיים זה לא נכון.

משפט הגבול המרכזי

משפט: (CLT)

יהיו $X_1,X_2,\dots$ ממ"ב"ש עם תוחלת μ ושונות σ^2, אז

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

תרגיל:

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

פתרון:

$$P(Poi(\lambda)=a)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^a}{a!} \qquad Poi(\lambda)\underset{\text{בת"ל}}{+}Poi(\lambda')\sim Poi(\lambda+\lambda')$$

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=P(Poi(n)\le n)=P\left(\sum_{i=1}^{n}Poi(1)\le n\right)=$$

$$=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Poi(1)-n\cdot 1}{\sigma\sqrt{n}}\le 0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{CLT}P(N(0,1)\le 0)=\frac{1}{2}$$

תרגיל:

חשבו את

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{X_1^{-\frac{1}{3}}+\cdots+X_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}}\right)dx_1\ldots dx_n$$

פתרון:

$\Omega=[-1,1]$ עם מידת לבג מנורמלת. יהיו $X_1,X_2,\ldots\sim U[-1,1]$ בת"ל.

נגדיר $Y_i=X_i^{-1/3}$, נקבל

$$\underbrace{\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}}\underbrace{\cos\left(\frac{X_1^{-1/3}+\cdots+X_n^{-1/3}}{\sqrt{n}}\right)}dx_1\ldots dx_n=\mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_n}\left[\cos\left(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$X_1^{-1/3}+\cdots+X_n^{-1/3}$ מה זה על $[-1,1]^n$

$$\mathbb{E}[f(X)]=\int_{\Omega}f(x)\,dP \qquad \left(X_1^{-1/3}+\cdots+X_n^{-1/3}\right)(\omega_1,\ldots,\omega_n)=$$
$$=X_1(\omega_1)^{-1/3}+\cdots+X_n(\omega_n)^{-1/3}$$

נסמן $S_n=Y_1+\cdots+Y_n$. נרצה לחשב את $\mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

$$\downarrow$$

$$\mathbb{E}[\cos(N(?,?))]$$

נחשב את התוחלת ואת השונות של Y_k. $\quad Y_k = X_k^{-1/3}$

$$\mathbb{E}[Y_k] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{-1/3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$Var(Y_k) = \mathbb{E}[Y_k^2] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 3$$

לכן $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,3)$. לפי האפיון של התכנסות בהתפלגות כהתכנסות חלשה,

$$\mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \longrightarrow \mathbb{E}[\cos(N(0,3))]$$

אם $Z \sim N(0,3)$,

$$\mathbb{E}[\cos Z] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\varphi_Z(1)+\varphi_Z(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{3}{2}\cdot 1} + e^{-\frac{3}{2}\cdot 1}\right) = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi_{N(0,3)}(t) = e^{-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}t)^2} = e^{-\frac{3}{2}t^2}$$

תוחלת מותנית

הגדרה:

יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות, יהי X מ"מ, ויהי A מאורע מהסתברות חיובית.

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X\cdot \mathbb{1}_A]}{P(A)} = \frac{1}{P(A)}\int_A X\,dP$$

לדוגמא אם $X = \mathbb{1}_B$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_B|A] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_B\cdot\mathbb{1}_A]}{P(A)} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap B}]}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

הגדרה:

בתנאים הנ"ל, יהי Y מ"מ בדיד על Ω. אז נגדיר $Z=\mathbb{E}[X|Y]$ לפי

$$Z(\omega)=\mathbb{E}[X|Y=Y(\omega)]$$

דוגמה:

$\Omega=[0,1]$ עם מידת בורל/לבג, $X(\omega)=2\omega^2$, $Y(\omega)=\begin{cases}1, & 0\le\omega\le\frac{1}{3}\\ 2, & \frac{1}{3}<\omega\le\frac{2}{3}\\ 0, & \frac{2}{3}<\omega\le 1\end{cases}$.

בניסוח שקול מגרילים $U\sim[0,1]$, $X=2U^2$, $Y=\begin{cases}1, & 0\le U\le\frac{1}{3}\\ 2, & \frac{1}{3}<U\le\frac{2}{3}\\ 0, & \frac{2}{3}<U\le 1\end{cases}$.

נסמן $Z=\mathbb{E}[X|Y]$,

$$Z(\omega)=\begin{cases}\mathbb{E}[X|Y=1], & 0\le\omega\le\frac{1}{3}\\ \mathbb{E}[X|Y=2], & \frac{1}{3}<\omega\le\frac{2}{3}\\ \mathbb{E}[X|Y=0], & \frac{2}{3}<\omega\le 1\end{cases}$$

נחשב לדוגמה את המקרה הראשון:

$$\mathbb{E}[X|Y=1]=\frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Y=1\}}]}{P(Y=1)}=\frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3}]}]}{1/3}=3\int_0^{1/3}2\omega^2\,d\omega=$$

$$=\cancel{3}\cdot\frac{2\omega^3}{\cancel{3}}\Big|_0^{1/3}=\frac{2}{27}$$

הגדרה:

יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות, ותהי $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ תת σ-אלגברה, ויהי $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. <u>התוחלת המותנית של X בהינתן $\mathcal{G}$</u> היא משתנה מקרי $Y=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ כך שמתקיים:

א. $Y\in L^1(\Omega,\mathcal{G},P)$.

ב. לכל $A\in\mathcal{G}$ מתקיים $\int_A X\,dP=\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]=\int_A Y\,dP$

דוגמה:

א. $\mathcal{G}=\{\phi,\Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[X]$.

ב. אם Y מ"מ בדיד $\mathcal{G}=\sigma(Y)=\{Y^{-1}(A)|A\in\mathbb{B}(\mathbb{R})\}$, אז $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[X|Y]$.

נשתמש בסימון הזה גם למ"מ רציף.

דוגמה:

יהיו $\Omega=[0,1]$, P = מידת בורל. ניקח $X(\omega)=2\omega^2$, $Y(\omega)=\begin{cases}2, & 0\le\omega<\frac12\\ \omega, & \frac12\le\omega\le1\end{cases}$.

נמצא את $Z=\mathbb{E}[X|Y]$.

ראשית נבין מיהי $\sigma(Y)$. לפי ההגדרה,

$$\sigma(Y)=\{Y^{-1}(B)\,|\,B\in\mathbb{B}(\mathbb{R})\}$$

נחלק לשני מקרים:

- $2\notin B \Rightarrow Y^{-1}(B)=Y^{-1}(B\cap[\frac12,1])=B\cap[\frac12,1]$.
- $2\in B \Rightarrow Y^{-1}(B)=[0,\frac12)\cup(B\cap[\frac12,1])$.

לכן

$$\sigma(Y)=\{B\in\mathbb{B}(\mathbb{R})\,|\,B\subseteq[\tfrac12,1]\}\cup\{B\cup[0,\tfrac12)\,|\,B\in\mathbb{B}(\mathbb{R}),\ B\subseteq[\tfrac12,1]\}.$$

לכן Z קבוע על $[0,\frac12)$. נמצא את ערכו, c, על הקטע הזה:

$$\frac c2=\mathbb{E}[Z\cdot \mathbb{1}_{\{Y=2\}}]=\mathbb{E}[X\cdot \mathbb{1}_{\{Y=2\}}]\Longrightarrow \frac c2=\int_0^{1/2}X\,d\omega=\int_0^{1/2}2\omega^2\,d\omega=\frac1{12}\Rightarrow c=\frac16$$

על $\frac12\le\omega<1$, נגדיר $Z(\omega)=X(\omega)$. נוכיח ש-Z מקיים את ההגדרה של תוחלת מותנית. המדידות תנאי מתקיים ש-$\sigma(Z)\subseteq\sigma(Y)$.

לגבי החלק השני, נניח כי $A\in\sigma(Y)$ כך ש-$A=[0,\frac12)\cup A'$.

$$\mathbb{E}[Z\cdot \mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[Z\cdot \mathbb{1}_{[0,\frac12)}]+\mathbb{E}[Z\cdot \mathbb{1}_{A'}]=\underbrace{\mathbb{E}[X\cdot \mathbb{1}_{[0,\frac12)}]}_{\text{מהבחירה של } c}+\underbrace{\mathbb{E}[X\cdot \mathbb{1}_{A'}]}_{\text{כי על } A'\ Z\equiv X}=\mathbb{E}[X\cdot \mathbb{1}_A$$

תרגיל:

יהיו X,Y מ"מ אינטגרביליים. נניח ש- $\mathbb{E}[X|Y]=Y$ כמעט תמיד, וגם $\mathbb{E}[Y|X]=X$ כמעט תמיד. הוכיחו כי $X=Y$ כמעט תמיד.

הוכחה:

מהנתון נקבל $\mathbb{E}[X-Y|X]=0$ כמעט תמיד. לכן לכל $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t\}}|X]] =$$

$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$, $\mathcal{G}=\sigma(X)$

TOWIK

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\le t\}}\underbrace{\mathbb{E}[X-Y|X]}_{0}] = 0$$

מכאן נקבל

$$\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y\le t\}}] = \underbrace{\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t\}}]}_{0} - \mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y>t\}}] =$$

$$= -\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y>t\}}]$$

באופן סימטרי,

$$\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y\le t\}}] = -\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X>t, Y\le t\}}]$$

כלומר

$$\underbrace{\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y>t\}}]}_{\le 0} = \underbrace{\mathbb{E}[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X>t, Y\le t\}}]}_{\ge 0}$$

לכן בהכרח שניהם שווים 0, ומכאן $(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\le t, Y>t\}}=0$ כמעט תמיד.

$\Leftarrow$ $P(X\le t<Y)=0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

נשים לב כי

$$\{X<Y\} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} \{X\le t<Y\}$$

ולכן אגף ימין מהסתברות 0 $\Leftarrow$ $P(X<Y)=0$.

באופן סימטרי, $P(X>Y)=0$ $\Leftarrow$ $X=Y$ כמעט תמיד. $\square$