פתרון מד״ר עם התמרת לפלס

$f(t) \to F(s)$

$f(t-c)H(t-c) \to F(s)e^{-sc}$

$f(t) \to F(s)$

$f'(t) \to sF(s)-f(0)$

$f'' \to s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$$y''-4y'+3y=\begin{cases}\sin t & 0\le t\le \pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

$$y''-4y'+3y=\sin t-\sin t\cdot H(t-\pi)=\sin t+\sin(t-\pi)H(t-\pi)$$

$$s^2Y-4sY+3Y=\frac{1}{1+s^2}+\frac{1}{1+s^2}e^{-s\pi}$$

$$\left(s^2-4s+3\right)Y=\frac{1}{1+s^2}\left(1+e^{-s\pi}\right)$$

$$Y=\frac{1}{(1+s^2)(s-1)(s-3)}\left(1+e^{-s\pi}\right)$$

צריך למצוא A,B,C,D כדי להפוך את השבר ל $\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$:

$$\frac{A(s-3)\left(s^2+1\right)+B(s-1)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)(s-1)(s-3)}{(1+s^2)(s-1)(s-3)}$$

המונה צריך להיות שווה ל1 - לכל. אם נציב $s=1$ נקבל $A=-\frac{1}{4}$. אם נציב $s=3$ נקבל $B=\frac{1}{20}$. מכיוון ש$A+B+C=0$ נקבל $C=\frac{1}{5}$. נציב $s=0$ ונקבל

$$-3A-B+3D=1\Rightarrow D=\frac{1}{10}$$

סה״כ זה יוצא (נוציא גורם משותף 20)

$$=\frac{1}{20}\left(\frac{-5}{s-1}+\frac{1}{s-3}+\frac{4s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}\right)$$

לפי טבלת ההתמרות ההתמרה ההופכית של זה היא $\frac{1}{20}\left(-se^{t}+e^{3t}+4\cos t+2\sin t\right)$, וסה״כ נקבל:

$$y(t)=\frac{1}{20}\left(-se^{t}+e^{3t}+4\cos t+2\sin t\right)+\frac{H(t-\pi)}{20}\left(-se^{t-\pi}+e^{e(t-\pi)}-4\cos t-2\sin t\right)$$

אם נרצה להיפטר מהH(שהוא משהו שהוא 0 מתחת לπ ו1 מעל לπ) ניתן לכתוב

$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{20}\left(-se^{t}+e^{3t}+4\cos t+2\sin t\right) & 0\le t<\pi\\ \frac{1}{20}\left(-5e^{t}\left(1+e^{-\pi}\right)+e^{3t}\left(1+e^{-3\pi}\right)\right) & t>\pi\end{cases}$$

לפי נוסחה זו לא ברור ש$y(t)$ רציפה או גזירה ב$t=\pi$. ניתן לבדוק שאכן:

$$\lim_{t\to\pi^-}y(t)=\lim_{t\to\pi^+}y(t)$$

$$\lim_{t\to\pi^-}y'(t)=\lim_{t\to\pi^+}y'(t)$$

ובהכרח! כי $y(t)$ היא פתרון של מד"ר מסדר 2. יש לפתרון 2 נגזרות - ולכן הוא רציף, והנגזרת הראשונה רציפה.

כדי לפתור בעיה זו ללא התמרת לפלס:

- בקטע $0\le t<\pi$:

$$y''-4y'+3y=\sin t,\quad y(0)=y'(0)=0$$

$$y(t)=C_1e^{t}+C_2e^{3t}+\frac{2\cos t+\sin t}{10}$$

תנאי התחלה $\Leftarrow C_1=-\frac{1}{4},C_2=\frac{1}{20}$

- בקטע $t>\pi$:

$$y''-4y'+3y=0$$

$$y=D_1e^{t}+D_2e^{3t}$$

מוצאים D_1,D_2 על ידי הדרישה ש$y(t),y'(t)$ רציפות ב$y=\pi$

שימושי מד"ר והקדמה למד"ח

דוגמאות פשוטות לשימושי מד"ר

דוגמה 1

הטמפרטורה T של מכונית היא ביחס יחד לאנרגיה שלה. מכונית העומדת בשמש מקבלת אנרגיה בקצב קבוע s. היא מאבדת אנרגיה בקצב $a(T-T_c)$ כאשר T_c היא טמפרטורת הסביבה. (a קבוע)

מצא את הטמפרטורה T כפונקציה של הזמן t, ומצא $\lim_{t\to\infty}T(t)$.

פתרון

$T=\alpha E$ - (T טמפרטורה, E אנרגיה, α קבוע)

$$E'(t)=s-a(T-T_c)$$

$$T'(t)=\alpha s-\alpha a(T-T_c)$$

$$\boxed{T'(t)=c_1-c_2T}$$

$$c_1=\alpha s+\alpha aT_c$$

$$c_2=\alpha a$$

מד"ר מסדר ראשון ליניארי.

[החלק ההומוגני: $T'=-c_2T$, $T=Ke^{-c_2t}$]

הצבה $T=K(t)e^{-c_2t}$

$$K'e^{-c_2t}-c_2Ke^{-c_2t}=c_1-c_2Ke^{-c_2t}$$

$$K'=c_1e^{c_2t}$$

$$K=\frac{c_1}{c_2}e^{c_2t}+p$$

$$T(t)=\frac{c_1}{c_2}+pe^{-c_2t}$$

$$T(t)=\left(\frac{s}{a}+T_c\right)+pe^{-c_2t}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}T(t)=T_c+\frac{s}{a}}$$

דוגמה 2

ברצוני לשאול כמות כסף D מהבנק. הבנק דורש ריבית בקצב r, ואני משלם את החוב בקצב k. תוך כמה זמן אפרע את החוב? (נניח $k<r$)

פתרון

$D(t)$ - חוב בזמן t

$$D'(t) = rD(t) - k$$

פתרון: נציב $D(t) = z(t)\,e^{rt}$

$$z'e^{rt} + rze^{rt} = rze^{rt} - k$$

$$z' = -ke^{-rk}$$

$$z = C + \frac{k}{r}e^{-rt}$$

$$D(t) = Ce^{rt} + \frac{k}{r}$$

$$D(0) = C + \frac{k}{r}$$

$$C = D(0) - \frac{k}{r}$$

$$\boxed{D(t) = D(0)\,e^{rt} - \frac{k}{r}\left(e^{rt} - 1\right)}$$

$$D(t) = 0 \Rightarrow e^{rt} = \frac{-k}{rc} = \frac{-k}{rD(0) - k} = \frac{1}{1 - \frac{rD(0)}{k}}$$

זמן הפרעון: $\boxed{t = \frac{-1}{r}\ln\left(1 - \frac{rD(0)}{k}\right)}$

דוגמה 3 - חוק ניוטון השני

חוק ניוטון השני אומר ש"כוח=מסה×תאוצה"

חלקיק(חד מימדי):

מיקום	$x(t)$
מהירות	$x'(t)$
תאוצה	$x''(t)$

איזה מהירות יש לתת לחללית לצאת משדה הגרביטציה של כדור הארץ?
נסמן בR את רדיוס כדור הארץ. יש לנו חלקיק במרחב x ממרכז כדור הארץ.
הכוח על החלקיק הוא קבוע $\frac{Cm}{x^2}$
חוק ניוטון השני:

$$\frac{Cm}{x^2} = mx''$$

רוצים $x(t)$ כך ש

$$\boxed{x'' = \frac{C}{x^2}}$$

$$x(0) = R$$

רוצים למצוא $x'(0)$ הכי קטן אבל מספיק גדול[1] כך ש$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

מד"ר מסדר 2 בצורה נורמלית כללית $x'' = f(x, x', t)$ - אין שיטה כללית לפתור.
מד"ר מסדר 2 "בלי תלות על t" - $x'' = f(x, x')$ - ניתן להוריד משוואה זו לסדר ראשון:
יש לנו שתי פונקציות - $x(t)$ ו$x'(t)$. ניתן לציין גרף של xעל x' ולקבל עקומה - הצגה פרמטרית(t הוא הפרמטר). לכן אפשר לחשוב על x' כעל פונקציה של x: במקום לחשוב על $\left\{ \begin{array}{c} x(t) \\ x'(t) \end{array} \right\}$ כשתי פונקציות של t נחשוב על x' כפונקציה של x: $x' = p(x)$. ואז:

$$x'' = p'(x(t))\,x'(t) = p'(x(t))\,p(x(t))$$

$$pp' = f(x, p)$$

משוואה מסדר ראשון ל$p(x)$. פותרים, ואז פותרים $\frac{dx}{dt} = p(x(t))$ - עוד מד"ר מסדר ראשון.

במקרה שלנו, $x'' = -\frac{C}{x^2}$(כאן ' נגזרת ביחס לt). $pp' = -\frac{C}{x^2}$(כאן ' נגזרת ביחס לx)

$$\left(\frac{1}{2}p^2\right)' = \left(\frac{C}{x}\right)'$$

$$\frac{1}{2}p^2 = E + \frac{C}{x}$$

[1] זה נקרא מהירות בריחה escape velocity

(E קבוע)

$$\boxed{\frac{1}{2}x'^2 = E + \frac{C}{x\left(t\right)}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{E+\dfrac{C}{x}}} = \pm\int\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \pm\sqrt{2}t + \mathrm{const}$$

$$\begin{array}{c|c} x\left(T\right)=\infty & x\left(0\right)=R \\ x'\left(T\right)=0 & x'\left(0\right)=? \end{array}$$

מהמשוואה במסגרת, אם מגיעים ל$x=\infty$ עם מהירות (x') 0 בהכרח $E=0$. ולכן כאשר $x=R$ $\frac{1}{2}x'^2=\frac{C}{R}$

$$\boxed{\left|x'\right| = \sqrt{\frac{2C}{R}}}$$

כח = $\frac{mC}{x^2}-$. כח על פני כדור הארץ = $\frac{mc}{R^2}-$. $\frac{C}{R^2}=$ "g" - התאוצה הגביטציונלית $9.8\,{}^{\mathrm{m}}/{}_{\mathrm{s}^2}$ לכן ניתן לכתוב

$$\boxed{\left|x'\right| = \sqrt{2Rg}}$$