

מבוא לאלגברה לינארית
תרגיל 1 – פתרון

שאלה 1 :

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 2 & -2 & | & 1 \\ 7 & 0 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{5}{2} \\ 3 & 2 & -2 & | & 1 \\ 7 & 0 & 4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 7R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{2} & | & -\frac{13}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{2} & | & -\frac{33}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{2} & | & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & -10 \end{pmatrix}$$

למערכת אין פתרון .

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & | & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{משתנים חופשיים} \begin{cases} y = t_1 \\ w = t_2 \end{cases}$$

$$x = 2 - t_1 - t_2$$

$$y = t_1$$

$$z = 1 + t_2$$

$$w = t_2$$

← קבוצת הפתרונות של המשוואה :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R_2 \leftrightarrow R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} R_3 - 3R_2 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{14}R_3 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + \frac{3}{5}R_3 \rightarrow R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← למערכת יש רק פתרון טריוויאלי, ז"א $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$4. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} R_3 \leftrightarrow R_1 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 5R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -19 & -18 \\ 0 & -38 & -36 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -19 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -\frac{1}{19}R_2 \rightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{18}{19} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 - 8R_2 \rightarrow R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{19} \\ 0 & 1 & \frac{18}{19} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = t$ משתנה חופשי

בס"ד

$$x_1 = \frac{11}{19}t$$

$$x_2 = -\frac{18}{19}t$$

← קבוצת הפתרונות :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} \frac{11}{19} \\ -\frac{18}{19} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

שאלה 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-k & -2 & -1 & 1 \\ -2 & (2-k) & -2 & 2 \\ -1 & -2 & (5-k) & 1 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & (5-k) & 1 \\ -2 & (2-k) & -2 & 2 \\ 5-k & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$-1 \cdot R_1 \rightarrow R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (k-5) & -1 \\ -2 & (2-k) & -2 & 2 \\ 5-k & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - (5-k)R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k-5 & -1 \\ 0 & 6-k & 2k-12 & 0 \\ 0 & -12+2k & -1+(k-5)^2 & 1+(5-k) \end{array} \right)$$

$$R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k-5 & -1 \\ 0 & 6-k & 2k-12 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-6k & 6-k \end{array} \right)$$

אם $k=6$ ← נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, למערכת אינסוף פתרונות :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

אם $k=0 \Leftarrow$ נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$, למערכת אין פתרון.

בכל מקרה אחר, ז"א $k \neq 0, 6$ פתרון יחיד.

טל"ח