פתרון תרגיל 6

שאלה 1

א.

בהינתן חבורה G ותת-חבורה H, כדי להראות ש- H לא נורמלית ב- G יש למצוא איברים $h \in H, g \in G$ כך ש- $ghg^{-1} \notin H$. כאן נבחר למשל $h = \tau$, $g = \sigma$, ואז $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^2 \notin H$.

ב.

נסתכל על המחלקה σH: $\sigma H = \{\sigma, \sigma\tau\} = \{\sigma, \tau\sigma^{-1}\} = \{\sigma, \tau\sigma^3\} = \tau\sigma^3 H$

ועל המחלקה $\tau\sigma H$: $\tau\sigma H = \{\tau\sigma, \tau\sigma\tau\} = \{\tau\sigma, \sigma^{-1}\} = \{\tau\sigma, \sigma^3\} = \sigma^3 H$

נכפול את המחלקות הנ"ל לפי הנציגים השונים, ונראה כי נגיע לתוצאות שונות. כלומר נבחר $a = \sigma$, $b = \tau\sigma^3$, $c = \tau\sigma$, $d = \sigma^3$, ולפי מה שראינו לעיל מתקיים $aH = bH, cH = dH$. נשאר להראות $acH \neq bdH$. נבדוק:

$$acH = \sigma\tau\sigma H = \{\sigma\tau\sigma, \tau\sigma\tau\sigma\} = \{id, \sigma\tau\sigma\}$$

$bdH = \tau\sigma^3\sigma^3 H = \tau\sigma^2 H = \{\tau\sigma^2, \tau\tau\sigma^2\} = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\}$. וסיימנו כי $id \in acH$ אך $id \notin bdH$ לכן $acH \neq bdH$.

שאלה 2

א. $U_{21} = \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$, $N = \{1,8\}$. לפי משפט לגרנז' מספר המחלקות הוא $|U_{21}|/|N| = 12/2 = 6$.

ב. המחלקות הן

$1N = \{1,8\}, 2N = \{2,16\}, 4N = \{4,11\}, 5N = \{5,19\}, 10N = \{10,17\}, 13N = \{13,20\}$.

ג. נראה ש- G/N ציקלית (וזה מספיק כי אנחנו יודעים שיש חבורה ציקלית יחידה מכל סדר סופי). נראה כי $5N$ יוצרת את G/N:

$$(5N)^1 = 5N, \qquad (5N)^2 = 4N, \qquad (5N)^3 = 20N = 13N$$

$$(5N)^4 = 2N, \qquad (5N)^5 = 10N, \qquad (5N)^6 = 8N = N$$

שאלה 3

א. הסדר הוא אינסוף. (למשל, לכל p ראשוני $\frac{1}{p} + (\mathbb{Q}^*)^2$ היא מחלקה של $(\mathbb{Q}^*)^2$ ב- $\mathbb{Q}^*$, וכל המחלקות האלו שונות זו מזו).

ב. הסדר של האיבר הטריוואלי (כלומר המחלקה $(\mathbb{Q}^*)^2$) הוא 1, והסדר של שאר האיברים הוא 2, כי $(a(\mathbb{Q}^*)^2)^2 = a^2(\mathbb{Q}^*)^2 = (\mathbb{Q}^*)^2$.

שאלה 4

א. למשל $1/4 + Z$.

ב. נזכור שאיבר היחידה ב- Q/Z הוא המחלקה 0+Z=Z ולכן צריך לכל איבר $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ למצוא n כך ש- $n * x = \mathbb{Z}$ (זכרו שהפעולה פה היא חיבור, ולכן ה"חזקה" ב- n היא כפל ב- n). כל איבר בחבורת המנה הזו נוכל לכתוב באופן הבא: $\frac{a}{b} + Z, a,b \in Z, b > 0$. אזי $b(\frac{a}{b} + Z) = a + Z = Z$. לכן $\frac{a}{b} + Z$ הוא לכל היותר מסדר b.

ג. זו חבורה הנוצרת על ידי המחלקה $1/105 + Z$ (למה?), הסדר שלה הוא 105.

שאלה 5

$U_3 = \{1,2\}$
$U_4 = \{1,3\}$
$U_5 = \{1,2,3,4\}$
$U_6 = \{1,5\}$
$U_7 = \{1,2,3,4,5,6\}$
$U_8 = \{1,3,5,7\}$
$U_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$
$U_{10} = \{1,3,7,9\}$

נבצע חלוקה ראשונית לפי הסדר של החבורות: ראשית, ראינו שכל החבורות בעלות שני איברים איזומורפיות זו לזו. לכן קבוצה ראשונה היא $U_3 \cong U_4 \cong U_6$. בקבוצה השניה החבורות מסדר 4 U_5, U_8, U_{10} ונשאר להחליט מי מהן איזומורפיות אחת לשניה. לסיום בקבוצה השלישית U_7, U_9 ונשאר להחליט אם הן איזומורפיות או לא.

החבורות מסדר 4: ראינו כי יש 2 חבורות מסדר 4, והן $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. לכן מספיק להסתכל על הסדרים של האיברים: U_5 ציקלית כי היא נוצרת ע"י 2. U_8 לא ציקלית כי כל האיברים (מלבד היחידה) מסדר 2. U_{10} ציקלית כי היא נוצרת ע"י 3. לכן קיבלנו $U_5 \cong U_{10}$ ו-U_8 לא איזומורפיות להן.

החבורות מסדר 6: U_7 ציקלית (נוצרת ע"י 3), וכך גם U_9 (נוצרת ע"י 2), לכן $U_7 \cong U_9$.

לסיכום מחלקות האיזומורפיזם הן:

$U_3 \cong U_4 \cong U_6$
$U_5 \cong U_{10}$
U_8
$U_7 \cong U_9$

שאלה 6

א. יהי $a \in A$ כך ש- $a^n = e$. קל לראות שלכל $g \in G$ מתקיים $(gag^{-1})^n = e$ ולכן $gag^{-1} \in A$.

ב. לפי הרמז: $g^n \in A$ ולכן קיים m כך ש- $(g^n)^m = e$ ולכן $g^{nm} = e$; ז"א g שייך ל- A – סתירה.

שאלה 7

א. $f(xy) = (xy)^3 = x^3 y^3 = f(x)f(y)$ לכן זהו הומומורפיזם. הוא גם על כי לכל מס' מרוכב קיים שורש מעוקב.

ב. נראה כי קיימת חבורה כזו, נעזר בסעיף א'. ראשית נמצא מהו הגרעין של f : $Kerf = \{c \in \mathbb{C}^* \mid c^3 = 1\}$ ואלה הם שורשי היחידה המעוקבים: $Kerf = \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים $G/Kerf \cong \operatorname{Im} f$ אך ראינו כי f על לכן $G/Kerf \cong G$. כיוון ש- $Kerf$ לא טריוואלית (יש בה 3 איברים), זו הדוגמא שחיפשנו.

שאלה 8

נגדיר העתקה $\varphi : D_n \to S_n$. שימו לב: D_n נוצרת ע"י שני איברים (σ, τ) לכן מספיק להגדיר את $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$. נגדיר $\varphi(\sigma) = (123...n)$ (כלומר מחזור מסדר n) ו-

$\varphi(\tau) = (1\,n)(2\,n-1)(3\,n-2)(4\,n-3)\cdots$ (כלומר: אם n זוגי אז מצד ימין רשומה מכפלה של $\frac{n}{2}$ חילופים זרים, ואם n אי-זוגי אז מצד ימין רשומה מכפלה של $\frac{n-1}{2}$ חילופים זרים). φ מונומורפיזם, לכן D_n איזומורפית ל- $\operatorname{Im}\varphi$; כמו כן ראינו כי התמונה של כל הומומורפיזם היא תת-חבורה של הטווח, ובכך קיבלנו את הדרוש.