



## תרגיל 8

### שאלה 1:

בדוק אם הסדרות הבאות מתכנסות במידה שווה בקטעים הנתונים ומצא את פונקציית הגבול:

א. הסדרה  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sqrt[n]{\sin x} \right\}_{n=1}^{\infty}$  בקטע  $(0, \pi)$ .

ב. הסדרה  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{1+n^2x^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$  בקטע  $(0, \infty)$ .

ג. הסדרה  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x} \right\}_{n=1}^{\infty}$  בקטע  $(0, \infty)$ .

ד. הסדרה  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ e^{n(x-1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$  בקטע  $(0,1)$ .

### שאלה 2:

הוכח כי אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בהחלט, אז הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  וגם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$  מתכנסים במידה שווה על כל הישר.

### שאלה 3:

בדוק התכנסות במ"ש של הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$  ב-  $\mathbb{R}$ .

### שאלה 4:

הראה כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  מתכנס במידה שווה בקטע  $[-a, a]$  עבור  $0 < a < 1$  אבל אינו מתכנס במידה שווה בקטע  $(-1,1)$ .

### שאלה 5:

הוכח כי לכל  $t$  בקטע  $(-1,1)$  מתקיים:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$$

רמז: לכל  $t > -1$   $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$  ו-  $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x} dx$