הרצאה XXII- אינפי 1

דוגמאות:

1. $f(x) = \sin\sin(x)\ ; x_0 = 0$.

נשתמש בנוסחת טיילור $\sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$.

נמשיך לפתח ונקבל $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

2. להוסיף
3. להוסיף

טור טיילור:

תהי $f \in D^\infty(a,b)$, נוסחת טיילור היא $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n$. כאשר $r_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ וגם c מקיים $0 < \theta < 1$, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$. גם כן ידוע $|r_n(x_0,x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ עבור $x \in (a,b)$, $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

הערה: $C^\infty(a,b) \subset D^\infty(a,b)$

משפט: $f \in C^\infty(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. אם מתקיים $r_n(x,x_0) \to_{\to\infty} 0$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

הגדרה: אם $f \in C^\infty(a,b)$ וגם $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ אז אומרים f אנליטית *(Real analytic)*.

דוגמא: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ וגם $f \in C^\infty(-\infty,\infty)$. ע"פ טור טיילור $0 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \neq f(x)$.

ניתן להראות שעבור הפונקציות *sin(x), cos(x), exp(x)* השאריות שואפות לאפס. לכן ניתן למצוא להם טורי טיילור.

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$.
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}x^{2k}$.
- $\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}t^k\ \ t > -1$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\ \ t > -1$.

דוגמא: $|x| < 1$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$. זהו טור טיילור עבור פונקציה.

חקירה של פונקציה מונוטונית:

משפט: $f \in D(a,b)$

1. אם $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$ אז f עולה מונוטונית. ז"א $x \le y \implies f(x) \le f(y)$
2. אם $f'(x) \le 0$, $\forall x \in (a,b)$ אז f יורדת מונוטונית. ז"א $x \le y \implies f(x) \ge f(y)$
3. אם $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ אז f עולה ממש. ז"א $x < y \implies f(x) < f(y)$
4. אם $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ אז f יורדת ממש. ז"א $x < y \implies f(x) > f(y)$

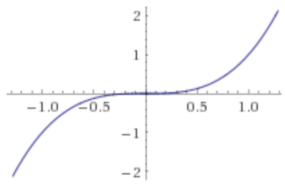
הוכחה:נוכיח רק את 1 : (ההוכחות האחרות דומות) . $x_1, x_2 \in (a,b)$. נניח בלי הגבלת הכלליות $x_1 \le x_2$. לפי משפט לגרנג' קיים c שמקיים $0<\theta<1$, $c = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ וגם מתקיים $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\ge 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\ge 0}$ ולכן $f(x_2) \ge f(x_1)$ וקיבלנו שf עולה מונוטונית. ההוכחות עבור 2,3,4 דומות מאוד.

<u>משפט</u> : $f \in D(a,b)$.

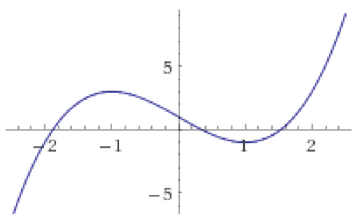
1. אם f עולה מונוטונית אזי $\forall x \in (a,b) :\ f'(x) \ge 0$.
2. אם f יורדת מונוטונית אזי$\forall x \in (a,b) :\ f'(x) \le 0$.

הוכחה : $f'(x) = \lim\limits_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \ge 0$ וידוע שt>0 לכן $f(x+t) \ge f(x)$ ולכן עולה מונוטונית. הוכחה עבור 2 דומה מאוד!

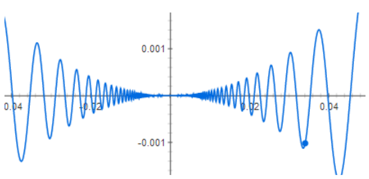
דוגמא : $f(x) = x^3$ מתקיים שf עולה ממש למרות שf'(0)=0.



דוגמא : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ מתקיים ש= $f'(x) = 3x^2 - 3$ $3(x-1)(x+1)$. לא עולה מונוטונית, יש לה כמה חלקים.



דוגמא : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) , & x \neq 0 \\ 0 , x = 0 & \end{cases}$. אם נגזור נראה שהעניין של המונוטוניות כאן לא נעים במיוחד, כי הפונקציה מחליפה את התחומי עליה וירידה שלה אינסוף פעמים בסביבת 0.



<u>נקודות קיצון מקומיות</u> :

<u>משפט</u> : f דיפ' בסביבה של x_0 ומוגדרת בקטע (a,b).

קיצון	$\mathbf{x_0 < x < x_0 + \delta}$	$\boldsymbol{x_0 - \delta < x < x_0}$
אין קיצון	$f'(x) \le 0$	$f'(x) < 0$
מינימום מקומי	$f'(x) \ge 0$	$f'(x) \le 0$
אין קיצון	$f'(x) > 0$	$f'(x) \ge 0$
מקסימום מקומי	$f'(x) \le 0$	$f'(x) \ge 0$
מינימום מקומי ממש	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
מקסימום מקומי ממש	$f'(x) \le 0$	$f'(x) > 0$

אם $f'(x)$ מחליפה סימן בx_0 אזי x_0 נקודת קיצון מקומית . (זה לא תנאי הכרחי!)

דוגמא: $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ ידוע ש$f\in D(-\infty,\infty)$ ולכן $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=0$ אבל

ע״פ היינה ניתן להראות ש(f'(x כשx שואף ל0, לא בהכרח שהגבול בנקודה שווה אפס.

<u>תנאי הכרחי של קיצון</u>:

למה של פרמה (Fermat): אם x_0 נקודת קיצון מקומית לf והפונקציה דיפרנציאבלית בx_0 אזי $f'(x_0)=0$. נאמר שנקודה היא קריטית אם הנגזרת בנקודה שווה ל0. לא מספיק שנקודה תהיה קריטית בשביל שתהיה קיצון, לדוגמא ניתן לקחת את הפונקציה $f(x)=x^3$ ולהביט בנקודה 0, נקבל שהנגזרת בנקודה שווה ל0, אבל ברור שהיא לא קיצון מהגרף של הפונקציה.

<u>תנאי מספיק לקיצון ע״פ נגזרת שנייה</u>:

<u>משפט</u>: $f:(a,b)\to R$ כאשר $x_0\in(a,b)$. נניח שf דיפרנציאבילית סביב x_0. נניח שהנקודה היא קריטית, ושהנגזרת השניה אינה אפס. אזי אם $f''(x)>0$ הנקודה היא מינימום מקומי, ואם $f''(x)<0$ אזי הנקודה היא מקסימום מקומי.

הוכחה: נשתמש בנוסחת טיילור סביב x_0. $f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''^{(x_0)(x-x_0)^2}+o((x-x_0)^2)$. וקיים $\varepsilon(x)$ כך שמתקיים עבורה $o((x-x_0)^2)=\varepsilon(x)(x-x_0)^2$ כמובן שעבור $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. מכאן שקיים δ חיובי שמקיים $|\varepsilon(x)|<\frac{|f''(x_0)|}{4}$ לכן מתקיים עבורנו שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $\underbrace{\left[\frac{f''(x_0)}{2}+|\varepsilon(x)|\right]}_{>0:(f''(x_0)>0),\ <0:(f''(x)<0)}$ $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2$. ונקבל ש$f(x)>f(x_0)$ ז״א x_0 מינימום מקומי ממש אם $f''(x)>0$. ובאופן דומה $f(x)<f(x_0)$ז״א x_0 מקסימום מקומי ממש אם $f''(x)<0$. מ.ש.ל.

<u>משפט</u>: (הכללה) תהי $f\in D^n(a,b)$ כאשר $x_0\in(a,b)$. נניח ש$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{n-1}(x_0), f^{(n)}(x_0)\neq 0$. אז:

1. אם *n=2k+1* אין קיצון בx_0.
2. אם *n=2k* אזי x_0 נקודת קיצון מקומית ועבור $f^{(2k)}(x_0)>0$ הנקודה היא מינימום מקומי, ואם $f^{(2k)}(x_0)<0$ אזי היא מקסימום מקומית.

נוכיח את המשפט בהרצאה הבאה.