

מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 2 - מערכת משוואות

שאלה 1. ציינו האם המטריצות הבאות מדורגות/מדורגות קנונית/לא מדורגות כלל, במידה והן מדורגות/מדורגות קנונית סמנו את האיבר המוביל.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון.

מטריצה זאת אינה מדורגת כלל.

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון.

מטריצה זאת מדורגת.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון.

מטריצה זאת מדורגת.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון.

מטריצה זאת מדורגת קנונית.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .5$$

פתרון.

מטריצה זאת אינה מדורגת כלל.

שאלה 2. פתרו את המערכות הבאות ובמידה ויש אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

$$\begin{cases} x + 7y = 4 \\ -2x - 9y = 2 \end{cases} .1$$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 4 \\ -2 & -9 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

לכן

$$5y = 10$$

↓

$$y = 2$$

-ו

$$x + 7y = 4$$

↓

$$x + 14 = 4$$

↓

$$x = -10$$

$$\begin{cases} y - 4z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 10x - 16y + 14z = 2 \end{cases} .2$$

פתרון. נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 10 & -16 & 14 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 10 & -16 & 14 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 5R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

בשורה האחרונה קיבלנו ש- $0 = 5$, הדבר לא יתכן לכן אין פתרון למערכת.

$$.3 \quad \begin{cases} x + 4y + 5z = 6 \\ -x - 2y - 6z = -3 \\ 4x + 10y + 23z = 15 \end{cases}$$

פתרון. נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ R_3 - 1R_1 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 + 3R_2 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נסמן $z = t$ נקבל $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$ ו- $x = -7t - y$, לסיכום יש אינסוף פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$.4 \quad \begin{cases} 3x + 2y + w = 4 \\ -2x + 4z - 6w = -4 \\ x + y + z - w = 1 \end{cases}$$

פתרון. נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \leftrightarrow R_1 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 - \frac{1}{2}R_2 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נסמן $w = s$, $z = t$ נקבל $y = -1 - 3t + 4s$ ו- $x = 2 - 3s + 2t$, לסיכום יש אינסוף

פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3s + 2t \\ -1 - 3t + 4s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 3. עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות, ובמקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי.

$$\begin{cases} ax + ay - az = a \\ -x + 4y - az = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 1 \end{cases} .1$$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 + aR_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a^2 - a & a \\ 0 & 0 & 4 - 2a & 1 \end{array} \right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\begin{cases} 5a \neq 0 \\ 4 - 2a \neq 0 \end{cases} \rightarrow$ נציב את המקרים $a = 0, 2$ ונראה מה נקבל

$a = 0$ •

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$a = 2$ •

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקבלנו שורת סתירה.

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + (2a - 2)y + (a^2 + a)z = a^2 \\ -6x - 2y - 2ya - za^2 - 5az = -5a - 3 \end{cases} .2$$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 2a-2 & a^2+a & a^2 \\ -6 & -2-2a & -a^2-5a & -5a-3 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 - aR_1 \\ R_3 + 6R_1 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 4-2a & -a^2-5a+6 & a-3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 2R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-5a+6 & a-3 \end{array} \right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a^2-5a+6 \neq 0 \end{cases} \rightarrow$ נציב את המקרים $a = 2, 3$ ונראה מה נקבל

• $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקבלנו שורת סתירה.

• $a = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8t \\ -9t \\ t \end{pmatrix}$$

שאלה 4. (מאתגר)

1. עבור אילו ערכי k יש למערכת

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + ky + z + w = 1 \\ x + y + k^2z + w = k \end{cases}$$

(א) אין פתרון

(ב) אינסוף פתרונות

(ג) פתרון יחיד

2. עבור $k = 1$ מצא את הפתרון הכללי של המערכת.

פתרון.

1. נרשום את המערכת המשוואות כמטריצה ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}]{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 & k-1 \end{array} \right)$$

אם $k = -1$ אז בשורה השלישית יהיה רשום $0 = 1$ לכן במצב זה נקבל שאין פתרון, אם $k = 1$ אז השורות השנייה והשלישית מתאפסות יש לנו אינסוף פתרונות עם 3 דרגות חופש, ואם $k \neq 1, -1$ אז אף שורה אינה מתאפסת אבל עדיין המערכת עם 4 משתנים ושלוש משוואות לכן יש לנו אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת, לסיכום:

(א) אין פתרון: $k = -1$

(ב) אינסוף פתרונות: $k \neq -1$

(ג) פתרון יחיד: ϕ

2. נציב $k = 1$ ונקבל שכל המערכת הופכת להיות משוואה אחת,

$$x + y + z + w = 1$$

לכן הפתרון הכללי הינו

$$(1 - y - z - w, y, z, w)$$

בהצלחה!!