אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

ה-4-תנע של מערכת חלקיקים

המשמעות של הקשר בין מסה, אנרגיה, ותנע מתחדדת כאשר אנו באים לדון במערכות עם יותר מחלקיק יחיד.

דיון זה יביא אותנו להבנה טובה יותר של דוגמאות מפיזיקה גרעינית, פיזיקת החלקיקים, וגם כימיה, וגם יספק הוכחות נסיוניות רבות לתורת היחסות הפרטית.

אין צורך להכיר את כל הגרעינים והחלקיקים בהם נדון, אך נשתמש בהם כדוגמאות ללמוד מהן.

<u>האדיטיביות של התנע</u>

זיכרו שקיבלנו את

- הביטוי $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ עבור ה-3-תנע היחסותי מדרישת שימור התנע בהתנגשות
- הביטוי $K = m(\gamma - 1)$ עבור אנרגיה קינטית מהדרישה שביצוע עבודה

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$ על גוף משנה את האנרגיה הקינטית שלו ב- dK

שימו לב שבקבלת ביטוי ה-3-תנע דרשנו **שסכום התנעים** של גופים נשמר בעקבות התנגשות.

לכן מובטח לנו שה-3-תנע הוא אדיטיבי, כלומר שאם $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ הם התנעים של שני גופים,

אז סכום התנעים $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ הוא **וקטור התנע** הכולל, כלומר:

- הוקטור שנשמר בהתנגשויות של כל המערכת עם גוף נוסף
- שואף לתנע הניוטוני בגבול של מהירויות נמוכות

- ומקיים את החוק השני של Fניוטון, שכתבנו אותו בצורה של שינוי האנרגיה הקינטית של גוף בעקבות הפעלת כוח עליו: $dK = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r}$.

טענת האדיטיביות נכונה לגבי האנרגיה היחסותית, משום שקיבלנו אותה מתוך הדרישה שהיא שווה לעבודה שהשקענו בגוף כדי להגדיל את מהירותו.

מאחר שעבודה היא אדיטיבית, אז כך גם אנרגיה.

אז ה-4-תנע של מערכת גופים שווה לסכום ה-4-תנעים של חלקיו: $\tilde{p} = \sum_i \tilde{p}_i$

4-תנע של מערכת גופים בתנועה יחסית

(נקפיד כאן להבדיל בין המושגים "מערכת" = "מערכת יחוס" ו-"מערכת גופים" או "מערכת פיזיקלית", שהיא אוסף של גופים.

נתבונן במערכת המורכבת מזוג גופים (נקרא לה הזוג), כל אחד בעל אותה מסה m.

מערכת המנוחה O של הזוג היא המערכת שבה התנע המרחבי הכולל הוא 0.

זוהי מערכת מרכז המסה.

במערכת זו, שני החלקיקים נעים באותה המהירות β בכוונים הפוכים.

למשל, אלה יכולים להיות שני אטומים במולקולה או שני תאומים המרחפים בחללית.

ה-4-תנע של החלקיק הראשון הוא $\tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma m\vec{\beta} \end{pmatrix}$, והתנע של השני הוא $\tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} \gamma m \\ -\gamma m\vec{\beta} \end{pmatrix}$.

אז סך כל התנע של הזוג הוא

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} 2\gamma m \\ \vec{0} \end{pmatrix}.$$

כצפוי, סך כל ה-3-תנע הוא 0.

אנו יודעים כי

- רכיב הזמן p^0 של ה-4-תנע הכולל הוא סך כל האנרגיה של הזוג, סכום האנרגיה הקינטית ואנרגית המנוחה: $E = E_{rest} + K$
- האנרגיה הקינטית היא סוג האנרגיה היחיד שתלוי במהירות.

- במערכת O, מהירות המערכת היא 0, אז K=0.
- אז האנרגיה הכוללת $E = 2\gamma m$ היא אנרגית המנוחה.
- עבור גוף אחד, זיהינו את אנרגית המנוחה עם המסה.
- אבל אנרגית המנוחה של המערכת שונה מסכום המסות של שני הגופים: $2\gamma m > 2m$.
- אז אם נזהה את אנרגיית המנוחה עם המסה, נגלה שמסה איננה אדיטיבית.

נבדוק אם לאנרגית המנוחה של המערכת יש את המשמעות הרגילה של מסה.

כדי לעשות זאת, נחזור למשמעות הבסיסית של מסה M, והיא שלגוף בעל מסה M ומהירות $\vec{\beta}'$

יש 4-תנע מהצורה $\tilde{p}' = \begin{pmatrix} \gamma' M \\ \gamma' M\beta' \end{pmatrix}$,

כלומר, כדי להאיצו ממהירות 0 למהירות $\vec{\beta}'$, יש להשקיע בו אנרגיה $K' = M(\gamma' - 1)$, ואז התנע שלו הוא $\gamma' M\beta'$.

אפשר גם להגדיר את משמעות המסה בקירוב הניוטוני, והיא שאם $\vec{\beta}' << 1$ אז ה-4-תנע הוא בקירוב $\tilde{p}' \approx \begin{pmatrix} M - \frac{1}{2}M\beta'^2 \\ -M\beta' \end{pmatrix}$, כלומר, כדי להאיצו ממהירות 0 למהירות $\vec{\beta}'$, יש להשקיע בו אנרגיה $K' \approx \frac{1}{2}M\beta'^2$, ואז התנע שלו הוא $M\beta'$.

אז נאיץ את המערכת כולה למהירות β' בכוון x , כלומר, נתבונן בה ממערכת ייחוס 'O, ושם נבחן את ה-4-תנע שלה.

במערכת זו, ה-4-תנע הוא (נכתוב רק את רכיבי t ו-x)

$$\tilde{p}' = \Lambda_x(\beta')\tilde{p} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\gamma m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' 2\gamma m \\ -\gamma'\beta' 2\gamma m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' E_{rest} \\ -\gamma'\beta' E_{rest} \end{pmatrix}.$$

אז רואים של-4-וקטור של מערכת הגופים ישנה הצורה של 4-תנע של גוף עם מסה ששוה לאנרגית המנוחה שלו $E_{rest} = 2\gamma m$.

כלומר, E_{rest} היא אכן מסת המערכת M.

אם כן, תיאור מערכת זו, כולל השתנות מסת המערכת בשל האנרגיה הקינטית של מרכיבי המערכת, קונסיסטנטי עם מושג המסה כפי שתיארנו אותו עבור גוף בודד.
אנרגית המנוחה היא אכן המסה האינרציאלית של המערכת, המתארת את הקושי לשנות את מהירות המערכת, בדיוק כמו בפיזיקה ניוטונית.

אז גילינו שוב שהאנרגיה של מערכת גופים ניתנת לחלוקה לשני חלקים:

- אנרגיה קינטית: תלויה במהירות מערכת הגופים
- מסה, שהיא אנרגית המנוחה, שאינה תלויה במערכת, אבל היא סכום של מסות הגופים והאנרגיות הקינטיות שלהם ביחס ל-O (מערכת מרכז המסה הכוללת)

שאלת בית: חזרו על ההוכחה כאשר מסות שני הגופים אינן שוות והווכחו שהוכחה זו אינה תלויה בשום דבר אלא באנרגיה של הגופים במערכת המנוחה של התנע הכולל.

שאלה: אם נשקול את מערכת הגופים, האם גם אז נמצא שמסתה היא M?

תשובה: שימו לב שהמסות שמופיעות בכוח הגרוויטציוני $F = G_N \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ הן המסות האינרציאליות של הגופים בעלי הכבידה.
הבחנה זו ידועה בתור **עקרון השקילות (Equivalence principle)** בין מסה אינרציאלית למסה גרוויטציונית, והביאה את איינשטיין לפיתוח תורת היחסות הכללית.
לכן על התשובה לשאלה להיות "כן": **המסה האינרציאלית והמסה הגרוויטציונית זהות**.

שימו לב:

- מערכת המנוחה של 4-תנע מסוים היא המערכת בה החלק המרחבי הוא 0.
- לכן, מערכות המנוחה O_1, O_2 של כל אחד מהגופים שונות ממערכת המנוחה הכוללת O.
- ב-O, לכל אחד מהגופים יש אנרגיה קינטית $K_i = m_i(\gamma_i - 1)$ ואנרגיה כוללת $E_i = \gamma_i m_i$

- המסה הכוללת של המערכת שווה לסכום האנרגיות של שני הגופים, כלומר, מסה זו כוללת לא רק את אנרגיות המנוחה (המסות) של שני הגופים, אלא גם את האנרגיות הקינטיות שלהם במערכת מרכז המסה הכללית: $E = E_1 + E_2 = (m_1 + m_2) + (K_1 + K_2)$.
- זה מוצדק משום שסכום האנרגיות הקינטיות של הגופים הוא סך כל האנרגיה של מערכת הגופים כשהיא במנוחה.
- אז רואים שאנרגיה קינטית פנימית של גופים במערכת גופים באה לידי ביטוי במסה של מערכת הגופים.

מערכת גופים עם אנרגיה תרמית

כעת נניח שהגופים הנעים **נעצרים עקב חיכוך** עם האויר.

אז מערכת הגופים איבדה אנרגיה, וה-4-תנע שלה הוא עכשיו $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 2m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.

לא היה שימור אנרגיה כי על מערכת הגופים פעלו כוחות חיצוניים, והאנרגיה הקינטית הפכה לאנרגיה תרמית של האויר.

אבל אם נכלול את מולקולות האויר במערכת הגופים, אז שוב יש לנו מערכת גופים סגורה שסך כל האנרגיה שלה לא השתנה, וה-4-תנע שלה הוא $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.

אם כך, משיקולי שימור אנרגיה, רואים שגם אנרגיה תרמית צריכה להשפיע על המסה בדיוק כמו אנרגיה קינטית.

שימו לב שאנרגיה תרמית נובעת מתנודות חלקיקי האויר, כך שניתן ליישם ישירות את הדוגמה הראשונה של אנרגיה קינטית למקרה של אנרגיה תרמית.

4-תנע של מערכת גופים עם אנרגיה פוטנציאלית פנימית חיובית

נתבונן במערכת המורכבת מזוג גופים בעלי מסות m שוות, הנמצאים במנוחה.

הגופים מחוברים ע"י קפיץ חסר מסה. הקפיץ מכווץ ודרוך, כך שיש למערכת אנרגיה פוטנציאלית V.

כאשר הקפיץ משתחרר, האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ הופכת לאנרגיה קינטית של הגופים.

כל גוף מקבל אנרגיה קינטית $K = m(\gamma - 1) = \dfrac{V}{2}$.

כבר ראינו שבמצב זה, ה-4-תנע הכולל הוא $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$,

ומסת המערכת הכוללת היא $M=2\gamma m$.

מאחר שבין הזמן בו הקפיץ היה דרוך ובין הזמן בו הקפיץ השתחרר לא פעלו על המערכת כוחות חיצוניים, חוק שימור התנע דורש ש- $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ היה ה-4-תנע של המערכת גם לפני שחרור הקפיץ.

כלומר, רואים שהמסה M של מערכת הגופים מושפעת לא רק מאנרגיה קינטית או תרמית של מרכיבי המערכת, אלא גם מאנרגיה פוטנציאלית שלהם.

<u>דוגמה: דעיכת α</u>

אנרגית הקפיץ בדוגמה הקודמת תהיה קטנה בהרבה מאנרגית המנוחה של הגופים בכל מערכת סבירה, ולכן יהיה קשה מאוד למדוד את השפעת האנרגיה הפוטנציאלית על מסת המערכת.
אבל קיימת מערכת דומה – גרעין רדיואקטיבי – שבה כן ניתן למדוד זאת.

צורת תיאור גרעינים: שם$^{\text{מספר מסה}}$.
כאשר מספר המסה = מספר הנוקליאונים (פרוטונים וניוטרונים) בגרעין.
השם נקבע ע"י מספר הפרוטונים (יש להסתכל במערכה המחזורית), שזה מה שקובע את התכונות הכימיות של האטום שזה הגרעין שלו.
עבור גרעין מסוג כימי (שם) מסוים יכולים להיות מספר איזוטופים, שההבדל ביניהם הוא רק מספר הניוטרונים (ולכן מספר המסה).

נתבונן בגרעין של תוריום 232 (^{232}Th):

בגרעין זה 90 פרוטונים ו-142 ניוטרונים, והוא עובר דעיכת α לחלקיק α (גרעין הליום) ולרדיום 228:

$^{232}\text{Th} \rightarrow {}^{228}\text{Ra} \; {}^{4}\text{He}$,

כאשר לרדיום יש 2 פרוטונים ו-2 ניוטרונים (=גרעין הליום) פחות מאשר לתוריום.

במערכת המנוחה של התוריום, האנרגיה הקינטית של תוצרי הדעיכה היא 4.08 MeV, כאשר $1\ \text{MeV} = 10^{6}\ \text{ev} = 10^{-3}\ \text{GeV}$.

שימו לב להקבלה לדוגמה של הקפיץ:

ניתן לראות את גרעין התוריום כמורכב מגרעין רדיום ועוד גרעין הליום,

ו"קפיץ" דרוך (כוחות גרעיניים) ביניהם מספק את האנרגיה הקינטית הסופית.

נראה מהי השפעת האנרגיה של "הקפיץ" על מסת גרעין התוריום.

מסות של גרעינים נתונות בד"כ ביחידה amu = atomic mass unit,

כאשר הגדרת היחידה היא שמסת גרעין של ^{12}C היא 12 amu.

ביחידה זו[1],

- $m(^{232}\text{Th}) = 232.038\ \text{amu}$
- $m(^{228}\text{Ra}) = 228.031\ \text{amu}$
- $m(^{4}\text{He}) = 4.002\ \text{amu}$

הפרש המסה בין המצב התחילי והמצב הסופי הוא (יש לשמור עוד 2 ספרות)

$Q = m_i = 0.00438\ \text{amu}$.

מהשקילות בין מסה ואנרגיה ניתן למצוא: $1\ \text{amu} = 931.49\ \text{MeV}$.

ומכאן מקבלים שהפרש המסה הוא אכן $Q = 4.08\ \text{MeV}$, כנמדד.

סיכום ביניים: דינמיקה יחסותית

- הרחבנו את 3-וקטור המקום ל-4-וקטור המקום $\tilde{r} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix}$.

[1] אני משתמש בנתונים של Tipler and Llewellyn, http://www.whfreeman.com/modphysics/PDF/11-3c.pdf. הנתונים שניתן למצוא בויקיפדיה שונים ולעתים נראים לא קונסיסטנטים.

- בדומה להגדרת המהירות בפיזיקה ניוטונית, הגדרנו את ה-4-מהירות ע"י חלוקת וקטור מקום אינפיניטסימלי בסקלר הזמן האינפיניטסימלי, $\tilde{v} = d\tilde{r} / d\tau$
- הראינו שה-4-תנע המוגדר להיות $\tilde{p} = m\tilde{v}$ הוא 4-וקטור שנשמר בהתנגשויות ובעל אנרגיה שמקיימת את התנאים הרצויים (אנרגית מנוחה + אנרגיה קינטית ששוה לעבודה)
- ראינו שמכאן צריך לנבוע שאנרגיה פנימית של מערכת גופים תורמת למסה שלה.
- אימתנו תחזית זו ע"י שקילת הגרעינית המשתתפים בדעיכת α ומדידת האנרגיה הקינטית של תוצרי הדעיכה.

אימות זה, וכמוהו רבים אחרים, מהוים אישור שההנחות שהנחנו לגבי תורת היחסות הן נכונות.

ביקוע גרעיני (nuclear fission)

תהליך זה התגלה ב-1938 ע"י Otto Hahn, Fritz Strasmann, Lise Meitner.

מבחינה אנרגטית, הוא דומה לדעיכת α.

במקום שהגרעין מתפרק לגרעין קטן יותר ולגרעין הליום, הפירוק הוא לשני גרעינים כבדים, שממשיכים להתפרק מיד ע"י פליטת ניוטרונים, למשל:

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{141}Ba + {}^{92-}Kr + 3n$$

ה-Q של התהליך הוא 175 MeV.

בהקשר של תהליכים גרעיניים המשמשים להפקת אנרגיה, מענין לציין את צפיפות האנרגיה (האנרגיה המשתחררת ליחידת מסה של חומר),

$$\frac{Q_{\text{U fission}}}{m_{^{235}U} + m_n} \approx \frac{175\,\text{MeV}}{236\,\text{amu} * 931\,\dfrac{\text{MeV}}{\text{amu}}} \approx 8\times10^{-4}.$$

השוו זאת לצפיפות האנרגיה של דלק פחמימני, שהיא כ-

$$\frac{Q_{hydrocarbon}}{mc^2} \approx 4.5\times10^7\,\frac{J}{kg}\frac{1}{\left(3\times10^8\,\dfrac{m}{s}\right)^2} = \frac{1}{2}\times10^{-9},$$

שזה בערך מיליונית מצפיפות האנרגיה של ביקוע אורניום,

וזאת משום שהאנרגיה הטיפוסית של תהליכים כימיים היא מסדר גודל של eV לאטום יחיד,

בשעה שזו של תהליכים גרעיניים היא מסדר גודל של MeV לגרעין יחיד.

האם כשדלק פחמימני נשרף מסה הופכת לאנרגיה? מתוך מה שלמדנו על הקשר בין מסה לאנרגיה, יהיה עלינו להסיק שהתשובה היא כן:
מיכל דלק והאויר הדרוש לבעירתו נמצאים במנוחה. אז כל האנרגיה שלהם שווה למסה שלהם.
חלק קטן ממסה זו מומר לאנרגיה תרמית של תוצרי הבעירה.
תיכף נעמוד ביתר פרטים על מקור האנרגיה הזה.

(יש לציין שביקוע ספונטני, ללא פגיעה של ניוטרון בגרעין האורניום, מתרחש אף הוא, אך עם זמן חיים מאוד ארוך, של 800 מיליון שנה. ביקוע שנגרם בשל פגיעת ניוטרון נקרא ביקוע מאולץ)

תהליכים אנדוארגים ואקסוארגים

הסימן של $Q = m_i - m_f$ קובע מהן הדעיכות המותרות של גרעינים שונים.
הדעיכה $^{232}Th \rightarrow {}^{228}Ra\ \ {}^{4}He$ יכולה לקרות כי $Q>0$.
תהליך כזה נקרא תהליך אקסוארגי (exoergic), כי הוא משחרר אנרגיה (שנמדדת ב-erg).

להבדיל, ^{232}Th אינו יכול לדעוך ע"י פליטת פרוטון (גרעין מימן) לאקטיניום 231,
משום שסכום המסות של תוצרי הדעיכה $^{232}Th \rightarrow {}^{231}Ac\ \ {}^{1}H$
גדול ממסת גרעין האם, כלומר $Q<0$.
תהליך זה הוא אנדוארגי (endoergic), כלומר, יש צורך "להכניס" אנרגיה למערכת כדי לגרום לתהליך לקרות.

מערכת קשורה - אנרגיה פוטנציאלית שלילית

הקפיץ בדוגמה הקודמת היה דרוך, ולכן בעל אנרגיה פוטנציאלית חיובית.
הוא היה מועד לתהליך אקסוארגי.
במצבים רבים קיימת אנרגיה פוטנציאלית שלילית – אנרגית קשר שקושרת שני (או יותר) גופים זה לזה.

למשל, נתבונן בגרעין הדאוטריום ^{2}H, המסומן גם d, והמכיל פרוטון וניוטרון במצב קשור.

מצב קשור: קיים כוח משיכה ביניהם, ולכן אנרגיה פוטנציאלית שלילית.

המסות הרלוונטיות הן[2]:

- $m(p) = 1.0078$ amu
- $m(n) = 1.0087$ amu
- $m(d) = 2.0141$ amu

סכום המסות של הפרוטון והניוטרון הוא $m(p) + m(n) = 2.0165$ amu,
שזה 0.0024 amu יותר ממסת הדאוטרון.

0.0024 amu = 2.22 MeV נקראת אנרגית הקשר בין הפרוטון והניוטרון.

כדי לפרק את הדיאוטרון למרכיביו יש להשקיע אנרגיה זו.

כאשר פרוטון וניוטרון מתחברים ליצור דאוטרון, אנרגיה זו משתחררת (בצורת אור, קרינת γ).

כלומר, עבור התהליך $d \to pn$ מתקיים $Q<0$

ועבור התהליך ההפוך $pn \to d$ מתקיים $Q>0$.

שימו לב: מצב קשור של נוקליאונים (כלומר, גרעין) הוא בעל מסה נמוכה מסכום מסות הנוקליאונים (הפרוטונים והניוטרונים).

זאת משום שכדי לפרק את המצב הקשור יש להשקיע אנרגיה ובכך להגדיל את המסה.

או לחילופין, כאשר נותנים להם להתקרב ולהקשר, כוח המשיכה ביניהם יכול לבצע עבודה, ולכן סך כל האנרגיה (המסה) קטנה, בד"כ תוך פליטת אנרגיה בצורת קרינה.

היתוך גרעיני (nuclear fusion)

היתוך הוא התהליך ההפוך מביקוע: חיבור של גרעינים קלים לגרעין כבד, למשל חיבור של ניוטרון ופרוטון ליצירת דאוטרון.

אלא שהתהליך $pn \to d$ אינו מועיל, כי אין מקור של ניוטרונים חופשיים.

כיום עובדים על הפקת אנרגיה מהיתוך בתהליך $^2H + {}^3H \to {}^4He + n$.

במקרה זה $Q = 17.6$ MeV, פחות מאשר בביקוע,

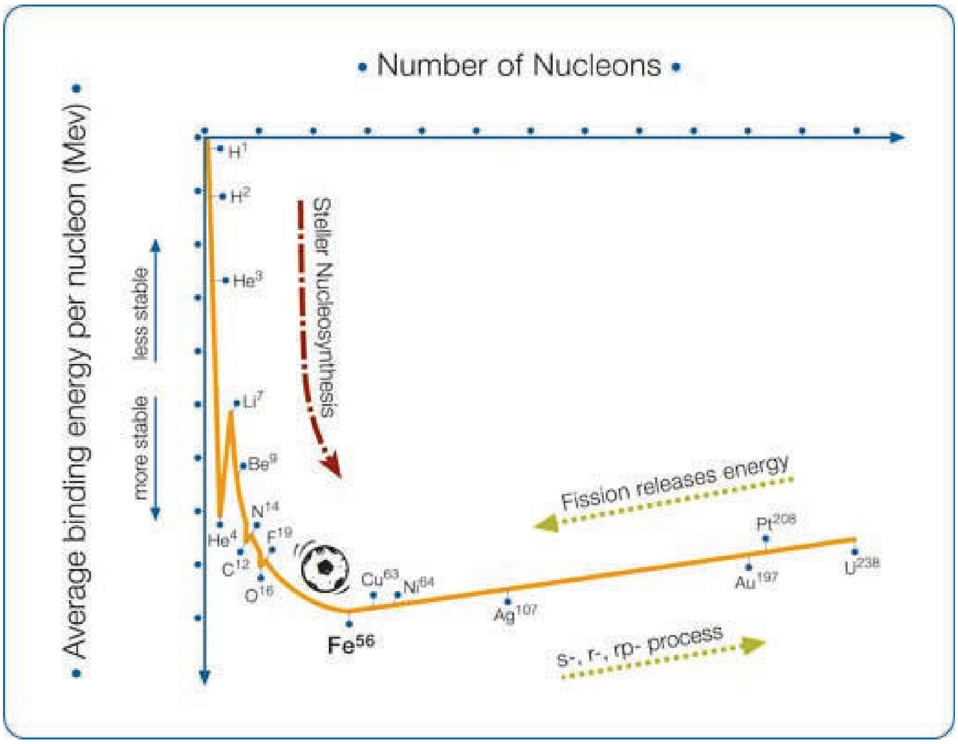
אבל צפיפות האנרגיה היא $Q/(m_n+m_p) \sim 9\times10^{-3}$, פי 4 יותר מאשר בביקוע.

[2] מסות מ- L. Sartori, Understanding Relativity, 1999

בנוסף, פרט לחומרי מבנה בכור, לא נוצרים חומרים רדיואקטיביים כבדים ישירות מן התהליך, ולכן כמות הפסולת הרדיואקטיבית קטנה מאשר במקרה של ביקוע.

הערה: כיצד יתכן שגם ביקוע וגם היתוך הם תהליכים אקסוארגים?
כמובן, לא כל תהליכי הביקוע וכל תהליכי ההיתוך הם אקסוארגים. זה תלוי בתהליך הספציפי. אבל באופן כללי, הגרעינים היציבים ביותר (בעלי אנרגית הקשר הגדולה ביותר לנוקליאון) הם ^{62}Ni ו- ^{58}Fe. תהליכי היתוך או ביקוע שמשנים גרעינים בכוון של גרעינים אלה הם בד"כ אקסוארגים.

הנה גרף אנרגיית הקשר חלקי מספר הנוקליאונים כפונקציה של מספר הנוקליאונים:



מבט נוסף על תהליכים כימיים:

כעת אפשר לחזור שוב לתהליך של בעירה כימית, למשל $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$.
אמרנו שהאנרגיה המשתחררת בתהליך באה מהמסה של החומרים התחיליים.
למעשה קורים כאן שני תהליכים:

1. תהליך אנדוארגי של פירוק קשרים כימיים: $2H_2 \rightarrow 4H$, $O_2 \rightarrow 2O$.

תהליך זה דומה לפירוק דאוטרון למרכיביו. המרכיבים קשורים כאילו בקפיץ, ויש להשקיע אנרגיה (ולהגדיל את המסה) כדי לפרק אותם, בד"כ ע"י חימום.

2. תהליך אקסוארגי של יצירת קשרים כימיים: $2O + 4H \rightarrow 2H_2O$.

בתהליך זה מאפשרים לקשר להתרחש. המרכיבים מתקרבים תחת משיכתם ההדדית, נפלטת אנרגיה, והמסה קטנה.

אלא שכאמור, בתגובות כימיות האנרגיות המעורבות קטנות, ולכן קשה לבצע את מדידת שינוי המסה במדויק.

תהליכים גרעיניים בהם חלקיקים נעלמים ונוצרים חלקיקים חדשים:

עד כה ראינו תהליכים שבהם נוקליאונים קשורים בגרעין מתפרקים או בו נוקליאונים חופשיים מתחברים לגרעין.

בשמש קורה תהליך היתוך מסובך יותר, בו חלקיקים מסוימים נעלמים ובמקומם נוצרים אחרים:

$$2e + 4\,{}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + 2\nu$$

כאשר ν הוא חלקיק הנקרא ניוטרינו. במקרה זה $Q = 26.7\ MeV$

נכתוב את התהליך באמצעות הפרוטונים והניוטרונים המרכיבים את הגרעינים:

$$2e + 4p \rightarrow (2p + 2n) + 2\nu.$$

כלומר, שניים מהפרוטונים עברו את התהליך

$$p + e \rightarrow n + \nu$$

זהו תהליך אנדוארגי עם $Q = -0.78\ MeV$ אם הוא מסתיים בניוטרון חופשי.

אבל בתהליך המלא, הניוטרון במצב הסופי אינו חופשי: הוא קשור לעוד ניוטרון ושני פרוטונים בגרעין ההליום. קשר זה מקטין את המסה:

$$2m_p + 2m_n > m_{He}$$

דעיכת ניוטרון:

מאחר שהתהליך $p + e \rightarrow n + \nu$ הוא אנדוארגי,

התהליך ההפוך $n + \nu \rightarrow p + e$ הוא אקסוארגי.

כמו כן, מסת הניוטרינו זניחה ביחס ל-Q, ולכן העברת הניוטרינו משמאל לימין עדיין יוצרת תהליך אקסוארגי.

אך מסתבר, מסיבות קוונטיות שלא נפרט עליהן, שבהעברת הניוטרינו לימין הוא הופך לאנטי-ניוטרינו $\bar{\nu}$ (בדיוק כמו שבמשוואה אלגברית כאשר איבר עובר לצד השני הוא הופך סימן), כך שהתהליך הוא $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$,

תהליך זה קורה ספונטנית עבור ניוטרונים חופשיים עם זמן חיים של כ-15 דקות.

אם כך, מדוע הניוטרונים בגרעינים אינם דועכים?

זה אכן קורה בחלק מהגרעינים. גרעינים כאלה עוברים דעיכת β, בה את דעיכת הניוטרון אפשר לכתוב בתור התהליך הגרעיני $^{N}X \rightarrow ^{N-1}Y + e + \bar{\nu}$.

אילו זה היה קורה בכל הגרעינים, האטום היחיד ביקום היה מימן.

ניוטרונים בגרעינים יציבים אינם דועכים, כי אנרגיית הקשר של מרכיבי הגרעין מקטינה את המסה הכוללת של הגרעין כך שדעיכת הניוטרון היא תהליך אנדוארגי, כך שאינו יכול לקרות ספונטנית.

יצירת חלקיקים חדשים במעבדה

- אנו יודעים כבר שבמערכת מתאימה, ניתן להחליף צורה אחת של אנרגיה באחרת:
  - גוף שנזרק למעלה הוא מערכת שממירה אנרגיה קינטית באנרגיה פוטנציאלית, ובלבד שהוא נזרק כך שהוא מתרחק מגוף בעל מסה גדולה (שמייצר כבידה)
  - בערה היא תהליך כימי שממיר אנרגיה פוטנציאלית (כימית) באנרגיה קינטית
- כמו כן, למדנו שמסה היא צורה של אנרגיה, וראינו איך מסה הופכת לאנרגיה אחרת.
- לכן, ניתן גם להמיר אנרגיה קינטית במסה:
  - נותנים לחלקיקים קלים אנרגיה קינטית רבה ומביאים אותם להתנגשות (במאיץ חלקיקים)
  - אז יכול להווצר חלקיק בעל מסה גבוהה ואנרגיה קינטית נמוכה (אפילו 0), ובלבד שקיים תהליך מיקרוסקופי מתאים.

תהליכים מיקרוסקופים חשובים קורים בין אלקטרון (e^-) לפוזיטרון (e^+) – האנטי-חלקיק של האלקטרון.

קיומם של אנטי-חלקיקים נחזה ע"י דיראק (Dirac) ב-1929, כאשר הוא ניסה לחבר בין תורת הקוונטים לתורת היחסות, דבר שהיה נחוץ ע"מ לתאר אלקטרונים יחסותיים.

הפוזיטרון הראשון נתגלה ע"י אנדרסון ב-1933 בקרינה קוסמית (ב-1936 אנדרסון זכה בפרס נובל על גילוי זה).

שאלה: נניח שיש לנו מאיץ פוזיטרונים, שיורה קרן על מטרה נייחת ובה אלקטרונים.

אנו מנסים לחולל את התהליך $e^+ e^- \to \psi$, כאשר ψ הוא חלקיק שמסתו $m_\psi = 3.1$ GeV, ואשר על גילויו זכו ריכטר וטינג (B. Richter, S. Ting) בפרס נובל לשנת 1976.

אז מהי אנרגית הפוזיטרון הדרושה?

תשובה: קודם, נכתוב את ה-4-תנע של שני החלקיקים לפני ההתנגשות, באמצעות מסותיהם ואנרגית הקרן:

$$\tilde{p}_{e^+} = \begin{pmatrix} E_{e^+} \\ \sqrt{E_{e^+}^2 - m_{e^+}^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}_{e^-} = \begin{pmatrix} m_{e^-} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לאחר ההתנגשות, ה-4-תנע של ה-ψ שווה לסך כל ה-4-תנע התחילי:

$$\tilde{p}_\psi = \begin{pmatrix} E_{e^+} + m_{e^-} \\ \sqrt{E_{e^+}^2 - m_{e^+}^2} \end{pmatrix}.$$

כעת ננצל את העובדה שריבוע הנורמה של ה-4-תנע הכולל שווה לריבוע המסה של ה-ψ, כלומר

$$\begin{aligned} m_\psi^2 &= \left|\tilde{p}_\psi\right|^2 = \left(E_{e^+} + m_{e^-}\right)^2 - \left(E_{e^+}^2 - m_{e^+}^2\right) \\ &= 2m_{e^-}E_{e^+} + m_{e^-}^2 + m_{e^+}^2 \end{aligned}$$

נקרא למשוואה זו **משוואת ההתנגשות** עבור חלקיק נע וחלקיק נייח.

ממנה נקבל

$$E_{e^+} = \frac{m_\psi^2 - m_{e^-}^2 - m_{e^+}^2}{2m_{e^-}}$$

במקרה הספציפי הזה, המסות של האלקטרון ושל הפוזיטרון שוות, ולכן

$$E_{e^+} = \frac{m_\psi^2 - 2m_{e^-}^2}{2m_{e^-}} = \frac{(3.1GeV)^2 - 2(0.511\times10^{-3}\ GeV)^2}{2(0.511\times10^{-3}\ GeV)} = 9.4\times10^3\ GeV$$

האנרגיה הדרושה גבוהה בהרבה ממסת החלקיק שאותו אנו רוצים ליצור, משום שהחלקיק הנייח קל מאוד.

לשם השוואה, אנרגית הקרן במאיץ האנרגטי ביותר, ה-LHC, היא רק 7000 GeV.

אז איך בכל זאת גילו את ה-J/ψ?

בשנות השבעים למדו לייצר מאיצים שמביאים שתי קרניים לכדי התנגשות.

במאיץ כזה, כאשר לשתי הקרניים אותה אנרגיה E, ה-4-תנעים של שני חלקיקי הקרן הם

$$\tilde{p}_{e^+} = \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}_{e^-} = \begin{pmatrix} E \\ -p \end{pmatrix}.$$

סך כל התנע הוא

$\tilde{p}_\psi = \begin{pmatrix} 2E \\ 0 \end{pmatrix}$, והנורמה שלו היא $m_\psi = |\tilde{p}_\psi| = 2E$.

ואז רואים ש- E = m/2, כלומר, ניתן ליצור את החלקיק המיוחל עם הרבה פחות אנרגיה.

את משוואת ההתנגשות שמצאנו ניתן ליישם גם למקרים בהם נוצר יותר מחלקיק אחד.

קודם כל, נרשום אותה בצורה כללית:

$$m^2 = 2m_{target}E_{beam} + m_{target}^2 + m_{beam}^2,$$

כאשר

- m_{beam} = המסה של חלקיק הקרן
- m_{target} = המסה של חלקיק המטרה (הנייח)
- E_{beam} = אנרגית חלקיק הקרן
- m = הנורמה של ה-4-תנע הכללי, שהיא
  - שווה עבור המצב התחילי ועבור המצב הסופי (בשל חוק שימור התנע)
  - בעלת אותו ערך בכל המערכות (בשל היותה סקלר – נורמה של וקטור)

- נקראת גם המסה האינוריאנטית של המצב הסופי (או התחילי)

כדוגמה, נתבונן בתהליך בו יוצרים **פרוטון ואנטי-פרוטון** ע"י הפצצת מטרת פרוטונים באמצעות קרן פרוטונים.

בשל חוקי שימור קונטיים, התהליך הפשוט ביותר בו ניתן לבצע זאת הוא

$p + p \to p + p + p + \overline{p}$, כלומר, שני הפרוטונים המקוריים נשמרים, ובנוסף נוצרים פרוטון ואנטי-פרוטון מהאנרגיה הקינטית התחילית.

שאלה: מהי האנרגיה המינימלית של קרן הפרוטונים עבורה יתרחש ייצור אנטי-פרוטון?

תשובה: נתבונן במשוואת ההתנגשות , שהופכת להיות

$$m_{ppp\bar{p}}^2 = 2m_p E + 2m_p^2 .$$

נחלץ את האנרגיה של הקרן: $E = \dfrac{m_{ppp\bar{p}}^2 - 2m_p^2}{2m_p}$.

אבל איך נדע מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לתהליך? ידוע מהו m_p, אבל מהו $m_{ppp\bar{p}}$ המינימלי?

שימו לב שלסקלר $m_{ppp\bar{p}}$ יש אותו ערך בכל המערכות, ובפרט **במערכת המנוחה** של הניסוי – המערכת בה סך-כל **התנע הוא 0**, הנקראת גם מערכת **מרכז המסה**.

במערכת מרכז המסה, $m_{ppp\bar{p}}$ גם שווה **לסך-כל האנרגיה** של כל החלקיקים ביחד.

מינימום האנרגיה הדרושה לקיום התהליך מתקבל כאשר כל חלקיקי המצב הסופי נמצאים במנוחה במערכת זו, כלומר, האנרגיה הכוללת שווה ל-4 פעמים מסת הפרוטון (אין אנרגיה קינטית לאף אחד מהחלקיקים).

כלומר, כדי שהתהליך יקרה, חייב להתקיים $m_{ppp\bar{p}}^2 \geq \left(4m_p\right)^2$.

נציב מסה מינימלית זו בפתרון לאנרגית הקרן:

$$E \geq \frac{\left(4m_p\right)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 7m_p = 7 \times 0.938\,\text{GeV} = 6.6\,\text{GeV} .$$

ב-1955 הצליחו Chamberlain & Serge לבצע תהליך זה באמצעות מאיץ הפרוטונים בברקלי, עבודה שעליה קיבלו את פרס הנובל ב-1959.

תנועת חלקיק טעון בשדה מגנטי אחיד, מדידת תנע

כידוע מאלקטרומגנטיות, הכוח שמפעיל שדה מגנטי $\vec{B}$ על גוף טעון במטען q שמהירותו $\vec{v}$ הוא $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$.

זיכרו ששמרנו על ההגדרה של הכוח $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, והשתמשנו בהגדרה זו במציאת הביטוי לאנרגיה קינטית (דרשנו שהיא שווה לעבודה שמבצע כוח).

כמו כן, אלקטרומגנטיות היא תורה יחסותית (מכך נולדה, בעצם, תורת היחסות)

ולכן גם עבור גוף יחסותי (מהיר) מתקיים $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$.

כידוע מקלאסית 1, מאחר שהכוח ניצב למהירות, הוא אינו משנה את גודל המהירות, אלא גורם לגוף לנוע בתנועה מעגלית.

לשם פשטות, ניקח את השדה להיות בכוון z ואז התנועה המעגלית היא במישור xy.

אז ה-3-תנע של הגוף הוא מהצורה $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \gamma m\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \gamma mv\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix}$,

כאשר

- $v^2 = v_x^2 + v_y^2$
- בחרנו את הזמן כך שב-t=0 החלקיק נע בכוון x
- המינוס ברכיב ה-y נובע מכך שכשהחלקיק נע בכוון x, הכוח עליו הוא בכוון $-y$

הנגזרת של התנע היא $\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma mv\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ -\cos\omega t \end{pmatrix}$, כי גודל המהירות לא משתנה.

הכוח הוא $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(-v_x B_z\hat{y} + v_y B_z\hat{x}\right) = qB\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} = qBv\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ -\cos\omega t \end{pmatrix}$.

נשווה שתי משוואות אחרונות אלה ונקבל, לאחר צמצום המהירות בשני הצדדים

$\gamma m\omega = qB$.

אז תדירות הסיבוב היא $\omega = \frac{qB}{\gamma m} = \frac{qB}{E}$.

באמצעות זמן המחזור $T=2\pi/\omega$ נוכל למצוא את רדיוס הסיבוב:

אורך ההקפה שווה לזמן המחזור כפול המהירות:

$2\pi r = Tv = \frac{2\pi E}{qB}\cdot\frac{p}{E}$, כאשר השתמשנו ב- $v=p/E$.

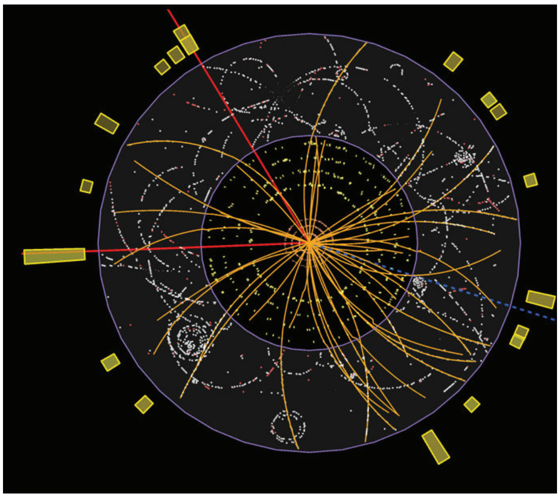
אז $r = \frac{p}{qB}$.

בצורה זו, ניתן לקבל את התנע של חלקיק מתוך רדיוס מסלולו בשדה מגנטי.

זיהוי של חלקיקים על פי דעיכתם

ברוב ההתנגשויות בין חלקיקים נוצרים חלקיקים רבים, ופיזיקאים צריכים למצוא מביניהם את החלקיקים המעטים המעניינים.

למשל, הנה תוצרי התנגשות של שני פרוטונים בניסוי ATLAS. ניתן לראות כי מסלולי החלקיקים מעוקלים ע"י השדה המגנטי:



נניח שאנו מחפשים חלקיק מסוים, D^0, שידוע כי מיד לאחר שנוצר בהתנגשות, הוא דועך לשני חלקיקים טעונים, π^+ ו- K^-.

אז איך אפשר לזהות את ה-D^0 בגלאי אם הוא דועך מיד?

ה-π^+ וה-K^- חולפים דרך הגלאי, וע"י כך ניתן לזהותם.

בנוסף, קיים בגלאי שדה מגנטי, כך שרדיוס עקמומיות מסלול החלקיק נותן את התנע שלו.
ע"י מדידת התנע וידיעת סוג החלקיק (המסה, אותה ניתן לעתים למדוד בגלאי אחר או שמניחים מהי, מתוך ידיעת מסות כל החלקיקים הטעונים ארוכי החיים) ניתן להסיק את האנרגיה שלו: $E^2=p^2+m^2$.

נתבונן ב-4-תנע של כל חלקיק:

$$\tilde{p}_\pi = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} \\ p_\pi \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}_K = \begin{pmatrix} \sqrt{p_K^2 + m_K^2} \\ p_K \end{pmatrix}.$$

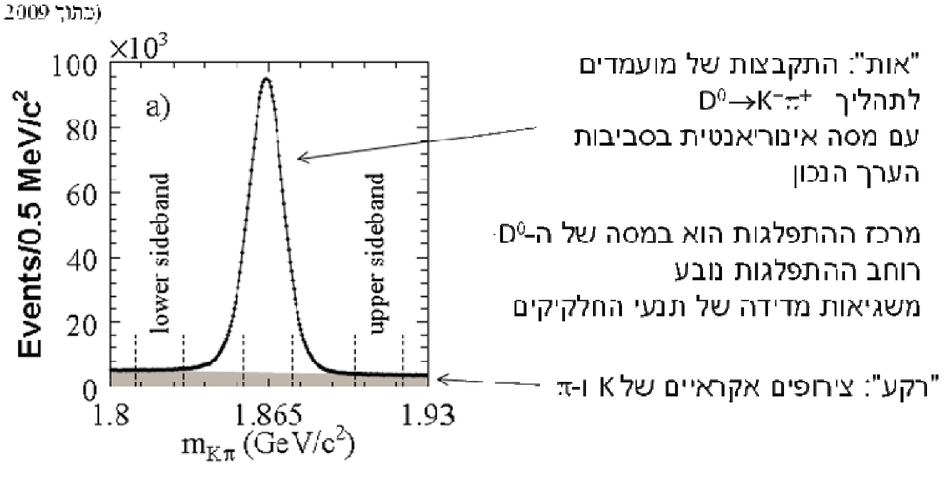
נחבר את ה-4-תנעים: $\tilde{p} = \tilde{p}_K + \tilde{p}_\pi$. התוצאה היא ה-4-תנע של **מועמד** ל-D^0.

אם באמת מצאנו זוג חלקיקים שנובע מהדעיכה $D^0 \rightarrow \pi^+ K^-$, אז הנורמה שלו צריכה להיות שווה למסה הידועה של ה-D^0 (עד כדי שגיאה נסיונית).

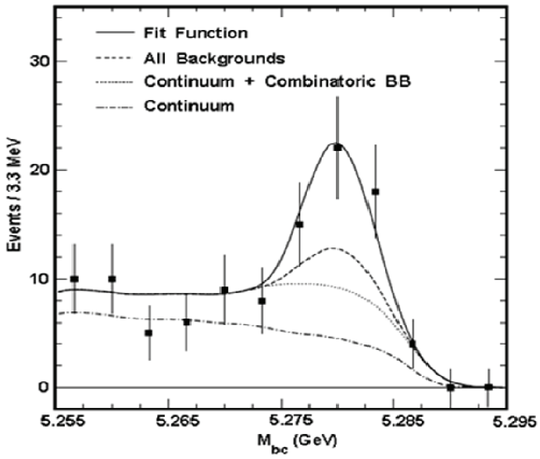
הנורמה של 4-תנע כזה נקראת גם **מסה אינוריאנטית**.

הנה התפלגות של מסה אינוריאנטית של זוגות π^+ ו-K^- שנאספו בניסוי *BABAR*:

(מתוך PRD 80, 071103, 2009)



לא תמיד יש כל-כך הרבה אות וכל-כך מעט רקע. למשל, הנה התפלגות המסה האינוריאנטית עבור שרשרת הדעיכות הבאה, שנתגלתה לראשונה בניסוי CLEO:



(מתוך PRL80, 5493, 1998)

$B^- \rightarrow D^0 K^-$

$D^0 \rightarrow K^-\pi^+$

$K^-\pi^+\pi^0$

$K^-\pi^+\pi^-\pi^+$

דעיכה ל-3 גופים

השתמשנו בדוגמה של דעיכה לשני חלקיקים, $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$. אבל ניתן לראות שגם כאשר הדעיכה היא ליותר חלקיקים במצב, הסופי המסה האינוריאנטית של סך כל תוצרי הדעיכה, תהיה שווה למסת חלקיק האם, $|\tilde{p}|^2 = \left(\sum_i |\tilde{p}_i|\right)^2$, וע"י כך ניתן יהיה לזהות באופן סטטיסטי את קיומן של דעיכות כאלה מעל לרקע.

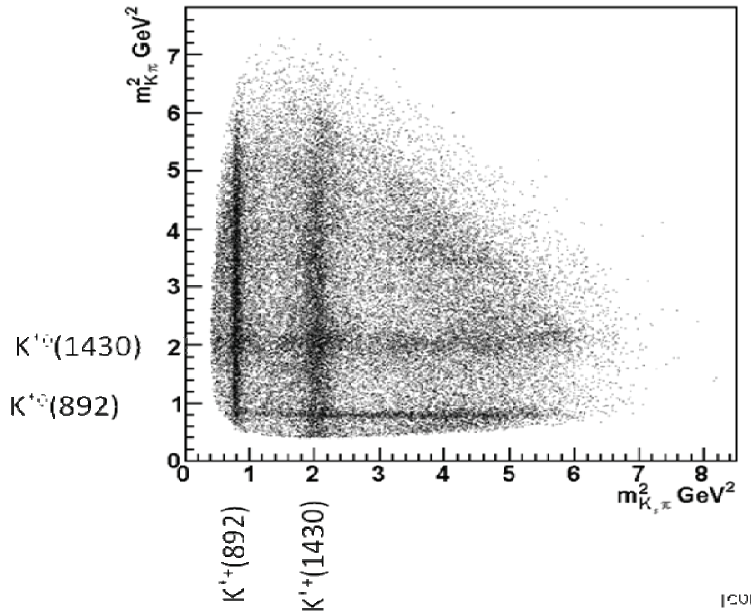
אבל בדעיכה ליותר מ-2 חלקיקים ישנם משתנים נוספים שמאפשרים לנו ללמוד על התהליך שהתרחש.

למשל, האם הדעיכה $A \rightarrow BCD$ למעשה מורכבת משתי דעיכות זו אחר זו,

$A \rightarrow BE$ ואחריה $E \rightarrow CD$?

הדרך לקבוע זאת היא להתבונן במסה האינוריאנטית של זוגות מתוך שלושת החלקיקים. ההתפלגות של ריבוע המסה האינוריאנטית של זוג אחד לעומת זו של זוג שני נקראת Dalitz plot, על שם הפיזיקאי שהשתמש בה לראשונה.

הנה ההתפלגות של $m^2_{K\pi} = \left|p_{K^-} + p_{\pi^+}\right|^2$ לעומת $m^2_{K_S\pi} = \left|p_{K_S} + p_{\pi^-}\right|^2$ בדעיכה $\eta_c \rightarrow K_S K^- \pi^+$.



$$\eta_c \rightarrow K_S K^- \pi^+$$
$$K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

מתוך: הצעה לדוקטורט, כיר גוטמן

ניתן לראות רצועות של צפיפות אירועים גבוהה בסביבות $(2\,\text{GeV})^2$ ו- $(0.8\,\text{GeV})^2$, רצועות אלה נוצרות מדעיכות של חלקיקים בעלי מסות של 1.43 GeV ושל 0.892 GeV, בהתאמה.

כלומר, חלק מהאירועים של $\eta_c \rightarrow K_S K^- \pi^+$ נובעים מהתהליכים

$$\begin{matrix} \eta_c \rightarrow K^{*0} K_S \\ K^{*0} \rightarrow K^- \pi^+ \end{matrix} \quad \text{או} \quad \begin{matrix} \eta_c \rightarrow K^{*+} \pi^- \\ K^{*+} \rightarrow K_S \pi^+ \end{matrix} \; ,$$

כאשר קיימים שני סוגים של K^*, בעלי מסות של 1.43 GeV ושל 0.892 GeV.

מדידת זמן החיים של חלקיקים

הראינו שהעובדה שמיואונים, שזמן החיים הממוצע שלהם הוא τ_μ=2.2 μs, מגיעים לכדור הארץ לאחר שעברו מרחק של עשרות קילומטרים (עשרות פעמים יותר מ- $c\tau_\mu$=660 m), היא תוצאה של התארכות הזמן.

ניסויים במאיצים נותנים הזדמנות יום-יומית לבדוק את התארכות הזמן באופן כמותי, תוך כדי שימוש בתכונות של 4-תנע.

קודם כל, נוכיח את התלות האקספוננציאלית של מספר החלקיקים שנמצאים באוסף חלקיקים שדועכים לאחר זמן ממוצע τ:

אם הדעיכה של כל חלקיק אינה תלויה באם חלקיק אחר דעך, אז השינוי במספר החלקיקים ביחידת זמן פרופורציוני במספר החלקיקים: $\frac{dN}{dt} \propto N$.

מאחר שמספר החלקיקים הולך וקטן (הם דועכים), $\frac{dN}{dt} < 0$.

אז נכתוב $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N$, כאשר ל-τ מימדים של זמן.

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא

$$\frac{dN}{N} = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\ln N = -\frac{t}{\tau} + N_0$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-t/\tau}$$

אז נניח שזמן החיים של חלקיק מסוים במערכת המנוחה שלו (O') הוא t', וזמן החיים הממוצע של מספר גדול של חלקיקים זהים מסוג זה הוא τ.

פירוש הדבר הוא שההתפלגות של t' עבור אוסף החלקיקים פרופורציונית ל-$\exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$.

אנו רוצים להתאים את ההתפלגות הנמדדת לפונקציה האקספוננציאלית ע"מ למדוד את τ.

אבל הניסוי מתבצע במערכת המעבדה (O).

ב-O, יהיה לחלקיק זמן חיים $t = \gamma t'$.

לא ניתן למדוד ישירות את t, אבל כן ניתן למדוד את **המרחק** בין נקודת הווצרותו לנקודת דעיכתו, שהוא

$d = t\beta = \gamma\beta t'$.

לכן, כדי למצוא את t', משתמשים ב- $t'=d/(\gamma\beta)$.

כמו כן, בד"כ לא ניתן למדוד ישירות את מהירות החלקיק β, אבל כן מודדים את ה-3-תנע שלו.

לכן, משתמשים בעובדה ש- $\gamma\beta=p/m$ (שנובעת ממה שלמדנו על 3-תנע יחסותי).

כלומר, $t'=d\dfrac{m}{p}$. כך נראית ההתפלגות עבור אוסף הדעיכות $D^0\rightarrow\pi^+K^-$ שראינו קודם מהניסוי *BABAR*:

(מתוך PRD80, 071103, 2009)

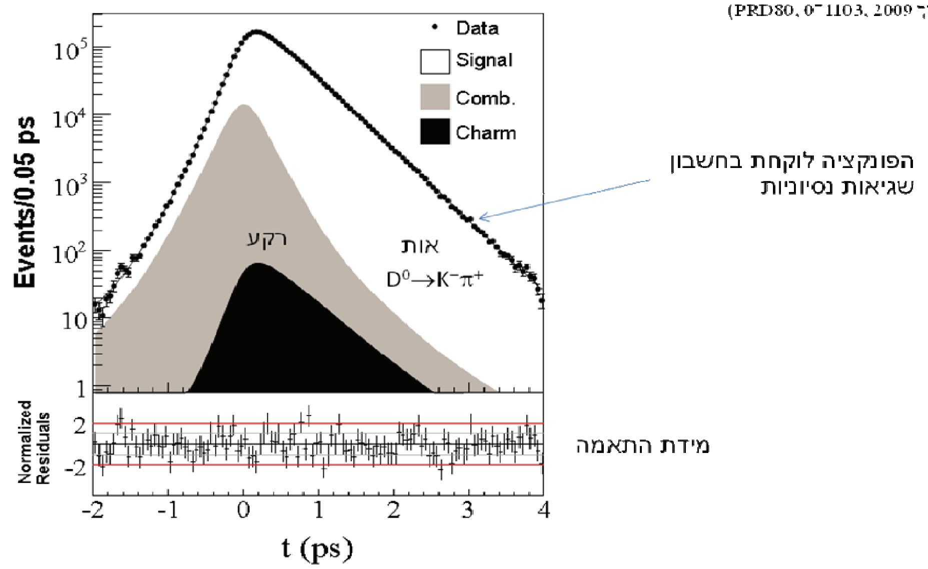
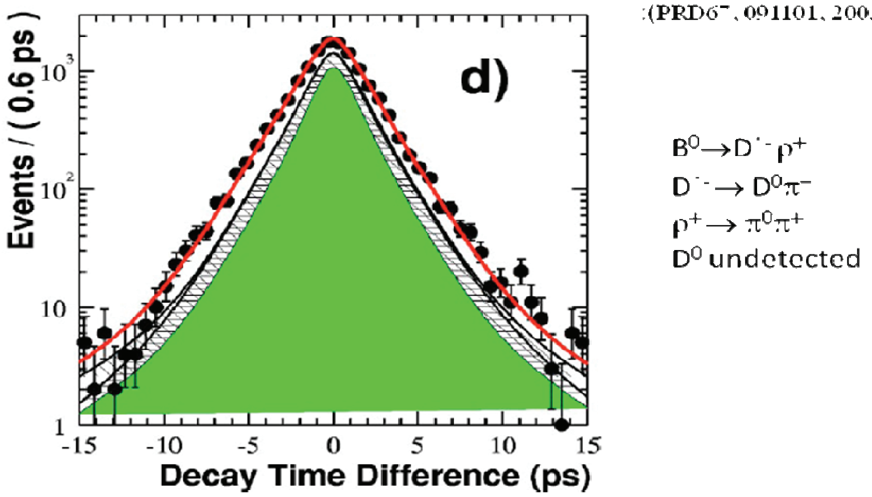


FIG. 2: $D^0\rightarrow K^-\pi^+$ decay time distribution with the data (points), total lifetime fit (line), combinatorial background (gray) and charm background (black) contributions overlaid.

גם כאן, לא תמיד האות כל-כך נקי, למשל (מ-*BABAR*):

(מתוך PRD67, 091101, 2003):



<u>רקטה יחסותית</u>

רקטות מונעות ע"י רתע: הן פולטות חומר הדף במהירות גבוהה מאחור, ומואצות קדימה בשל שימור התנע.

ברקטה בעלת חומר הדף לא-יחסותי, ניתן לראות שככל שהחומר מהיר יותר, הוא יעניק לרקטה יותר תנע עבור יחידת מסת חומר הדף. זאת משום שהרקטה נושאת את הדלק איתה, כך שרוצים למקסם את הגודל p/m=v.

במקרה של חומר הדף יחסותי, הקשר בין התנע, האנרגיה, והמסה של חלקיקי חומר ההדף הוא $p^2 = E^2 - m^2$.

מכאן רואים שהתנע שמקבלים מחומר ההדף מקסימלי כאשר מסת החומר זניחה ביחס לאנרגיה שלו, כלומר, האנרגיה הקינטית גדולה ביחס למסה.

מצב זה ניתן להשיג ע"י מתן אנרגיה קינטית גדולה לחומר (כך ש- $E^2 >> m^2$), או ע"י שימוש בחומר הדף חסר מסה, כלומר באור.

הדרך היעילה ביותר להמיר חומר דלק לאנרגית אור היא כאשר הדלק הוא חומר ואנטי-חומר, למשל, אלקטרונים ופוזיטרונים, שעוברים איון (annihilation) כשהם נפגשים והופכים לאור. למעשה, מאוד יקר ליצור אנטי-חומר ומאיצי החלקיקים הדרושים לשימורו כבדים בהרבה ממסת האנטי-חומר שהם מכילים. כך שפתרון זה אינו מעשי. אך נשתעשע ברעיון בכל זאת, ונמצא את כמות הדלק שצריכה הרקטה לסחוב אם עליה להגיע למהירות סופית כלשהי v.

נניח כי המסה התחילית של הרקטה היא m_i ומהירותה התחילית היא 0.
לאחר שהגיעה למהירות הסופית v, מסתה היא m_f, כלומר, היא השתמשה בדלק שמסתו $m_i - m_f$, אותו היא המירה לאור.

משימור האנרגיה הכללית במערכת בה הרקטה היתה במנוחה לפני תחילת תנועתה, נמצא

$$m_i = \gamma m_f + E_{rad},$$

כאשר E_{rad} היא סך-כל אנרגיה האור שנפלטה במהלך מסע הרקטה.

משימור התנע נמצא

$$0 = \gamma m_f v - E_{rad},$$

כאשר השתמשנו בכך שתנע האור שווה לאנרגיה שלו (כידוע ממשוואות מקסוול) ביחידות טבעיות.

חיבור המשוואות יצמצם את E_{rad}, ונקבל

$$m_i = \gamma m_f (1+v)$$
$$= m_f \frac{(1+v)}{\sqrt{1-v^2}} = m_f \frac{(1+v)}{\sqrt{(1-v)(1+v)}}$$
$$m_f \sqrt{\frac{(1+v)}{(1-v)}}$$

כלומר, כאשר הרקטה תגיע למהירות v, היחס בין המסה הסופית לתחילית יהיה

$$\frac{m_f}{m_i} = \sqrt{\frac{(1-v)}{(1+v)}}.$$

למשל, עבור v=0.5, נמצא $\frac{m_f}{m_i} \approx 0.58$, כלומר, 42% ממסת הרקטה צריכים היו להפוך לאור.

נמצא את המהירות הסופית עבור יחס מסות נתון, כלומר, נפתור עבור v:

$$v = \frac{1-\left(\frac{m_f}{m_i}\right)^2}{1+\left(\frac{m_f}{m_i}\right)^2}$$

וניתן לראות שככל ש-$\left(\frac{m_f}{m_i}\right)^2$ קטן יותר, המהירות הסופית שואפת ל-1, כצפוי.