תרגיל בית 2 אלגברה מופשטת 2

20 במרץ 2016

1. האם קיים הומומורפיזם (לאו דוקא אוניטרי) $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ כאשר:
   (א) $m|n$
   (ב) $n|m$ ו $n \neq m$.

2. רשמו את ההומומורפיזם (עם יחידה) היחיד $\mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z}_n)$. כמה הומומורפיזמם (עם יחידה) יש $\varphi\colon \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \to M_2(\mathbb{Z}_2)$?

3. הבאים הם כולם תת-חוגים של $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, מי מהם אידיאל?
   (א) $\Delta = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$
   (ב) $\{(2a,3b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$
   (ג) $\{(2a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$
   (ד) $\{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

4. יהיו R_1, R_2 חוגים, $I_i \lhd R_i$ אידיאלים.
   (א) הוכיחו כי $I_1 \times I_2 \lhd R_1 \times R_2$.
   (ב) $I = R_1 \times \{0\}$ ו $J = \{0\} \times R_2$ הם אידיאלים המקיימים $I + J = R_1 \times R_2$, $IJ = JI$ ו $IJ = I \cap J = \{0\}$.

5. הוכיחו כי אם $\{A_i\}_{i\in I}$ שרשרת של אידיאלים, אזי $\cup A_i$ הוא אידיאל.

6. יהיו I, J, K אידיאלים של חוג מסוים.
   (א) הוכיחו: $I(J+K) = IJ + IK$
   (ב) אם $I \subseteq J$ הוכיחו $J \cap (I+K) = I + (J \cap K)$.

7. יהי R חוג. $A \subseteq R$ תת-קבוצה.

(א) המאפס השמאלי של A בחוג הוא הקבוצה $Ann_l(A) = \{x \in R \,|\, xa = 0 \, \forall a \in A\}$ הוכיחו שזהו אידיאל שמאלי.

(ב) נניח A הוא אידיאל שמאלי של R, הוכיחו כי $Ann_l(A)$ הוא אידיאל (דו"צ).

(ג) הוכיחו כי עבור תת-קבוצות $A, B \subseteq R$ המכילות את 0 מתקיים $Ann_l(A + B) = Ann_l(A) \cap Ann_l(B)$.

8. יהי R חוג קומוטטיבי. נאמר שאיבר $x \in R$ הוא נילפוטנטh אם $x^n = 0$ לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$.

(א) הוכיחו שקבוצת כל האיברים הנילפוטנטים היא אידאל שנסמנו ב$\mathcal{N}$.

(ב) תנו דוגמא לחוג לא קומוטטיבי שבו קבוצת האיברים הנילפוטנטים הוא לא אידיאל.

9. יהיו $a, b \in R$. הוכיחו כי $Ra = Rb$ אם"ם $a = ub$ כאשר $u \in R$ איבר הפיך.