תורת הקבוצות תרגיל בית 8

1. הוכיחו: תהי $(P,<)$ קבוצה סדורה בסדר מלא. אזי יש בתוכה תת קבוצה קופינלית $A \subseteq P$ כך ש $(A,<)$ סדורה היטב.
(רמז: השתמשו בלמה של צורן).
פתרון:
תהי C קבוצת כל התתי קבוצות הסדורות היטב של P, עם יחס הסדר: $A_1 < A_2$ אם A_1 רישא של A_2. $C \neq \emptyset$, כי יש בה למשל נקודונים מP. ראשית נוכיח שקיים לC איבר מקסימלי. לצורך כך, לפי הלמה של צורן, מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה בC יש חסם מלעיל. למעשה, הוכחנו בתרגול שאיחוד של שרשרת עולה של תת קבוצות סדורות היטב עם היחס שהגדרנו היא תת קבוצה סדורה הטב. ולכן אם $\{A_i\}$ שרשרת עולה בC, $\cup A_i$ הוא חסם שלה בC.
לכן יש בC איבר מקסימלי. נקרא לו A. טענה: A קופינלית בP.
הוכחה: אחרת יש $p \in P$ כל שלכל $a \in A$ $p \ngtr a$. מכיוון שP סדורה בסדר מלא, זה אומר ש $a > p$ לכל $a \in A$. אז $A \cup \{a\}$ היא תת קבוצה סדורה היטב שA היא רישא שלה. בסתירה למקסימליות של A.

2. הוכיחו שקיימת קבוצה C של קטעים סגורים ב$\mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in C$ $x \cap y = \emptyset$, ולכל קטע סגור $z \notin C$ קיים $x \in C$ כך ש $x \cap z \neq \emptyset$.
פתרון:
תהי D קבוצת כל הקבוצות של קטעים סגורים ב$\mathbb{R}$ שהם זרים בזוגות. כלומר: $D = \{A_i\}$ כך שכל A_i הוא קבוצה של קטעים סגורים ב$\mathbb{R}$, ובנוסף: $x, y \in A \Longleftarrow x \cap y = \emptyset$.
ראשית, D לא ריקה. למשל, יש בה קבוצות בנות קטע אחד. כעת, נראה שקיים בD איבר מקסימלי ביחס להכלה.
הוכחה: תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD. נרצה להראות שיש לה חסם מלעיל. טענה: $\cup A_i$ הוא חסם מלעיל. הסבר: ברור שלכל i, $A_i \subseteq \cup A_i$. צריך להראות ש$\cup A_i \in D$. ובכן, ברור כי הוא קבוצה של קטעים ב$\mathbb{R}$. צריך להוכיח שהם זרים בזוגות. יהיו $x, y \in A$. קיימים i, j כך ש $x \in A_i, y \in A_j$. בה"כ $i < j$ ולכן $A_i \subseteq A_j$. כלומר, $x, y \in A_j$. מכיוון ש $A_j \in D$ נקבל ש $x \cap y = \emptyset$.
מסקנה: קיימת קבוצה מקסימלית בD. נקרא לה C.
יהי $z \notin C$ קטע ב$\mathbb{R}$. אם לכל $x \in C$ מתקיים $x \cap z = \emptyset$ אז $C \cup \{z\}$ היא קבוצה בD שמכילה את C, בסתירה למקסימליות של C. לכן, קיים $x \in C$ כך ש $x \cap z \neq \emptyset$. מש"ל.

3. הוכיחו את הלמה של תוכי:
תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות, כך ש $B \in D$ אמ"ם כל תת קבוצה סופית של B היא איבר בD. אזי, יש בD איבר מקסימלי ביחס להכלה.
פתרון: מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה בD (עבור יחס ההכלה) קיים חסם בD. ובכן, תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD. נסתכל על $\cup A_i$. ברור שהוא חסם של השרשרת עבור יחס ההכלה. צריך להוכיח שהוא שייך לD. לפי התנאי, מספיק להראות שכל תת קבוצה

סופית שלו שייכת לD. תהי $B \subseteq \cup A_i$ סופית. $B = \{b_1, ...b_n\}$. קיימים $i_i, ..., i_n$ כך ש: $b_j \in A_{i_j}$. בה"כ $i_1 < ... < i_n$. מכיוון שהשרשרת עולה, $A_{i_1} \subseteq ... \subseteq A_{i_n}$. לכן $B \subseteq A_{i_n}$. מהגדרת הקבוצה D, מאחר ו$A_{i_n} \in D$ וB תת קבוצה סופית שלו, אז $B \in D$. מש"ל.

4. הוכיחו שקיימת קבוצה S של מספרים ממשיים המקיימת:
א. לכל $a \neq b \in S$, $a - b$ אי רציונלי.
ב. לכל $a \notin S$ יש $b \in S$ כך ש $a - b$ רציונלי.

פתרון:

תהי D קבוצות כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שמקיימות: $A \ni a \neq b \Longleftarrow a - b \notin \mathbb{Q}$.
ראשית, D לא ריקה, כי יש בה למשל נקודונים. נוכיח שקיים בD איבר מקסימלי. ובכן, תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD (עם יחס ההכלה). צריך למצוא לה חסם מלעיל. ובכן, נקח את $\cup A_i$. ברור שהוא חסם של השרשרת. צריך להוכיח שהוא שייך לD. יהיו $a \neq b \in \cup A_i$. כלומר, קיימים i, j כך ש $a \in A_i, b \in A_j$. בה"כ $i < j$, לכן $A_i \subseteq A_j$, כלומר $a, b \in A_j$. $A_j \in D$ ולכן $a - b$ אי רציונלי.

מהלמה של צורן נקבל שקיים בD איבר מקסימלי, נסמנו בS.

יהי $a \notin S$. אם לכל $b \in S$ $a - b \notin \mathbb{Q}$, אז $S \subseteq S \cup \{a\} \in D$, בסתירה למקסימליות של S.