מתמטיקה בדידה (88-195): סיליבוס מפורט

פירוט בעמודים הבאים

תוכן העניינים

1. **קבוצות ופעולות עליהן:** קבוצה, איברים, השתייכות, תיאור קבוצה ע"י רשימה וע"י תכונה, הכמתים, שוויון קבוצות, שלילה של כמתים (אי-שיויון קב'), הכלה, קבוצה ריקה, איחוד, דיאגרמת וון, לוח השתייכות, חיתוך, קבוצות זרות, הפרש, הפרש סימטרי, קיבוץ/אסוציאטיביות, פילוג/דיסטריביוטיביות, משלים בתוך קבוצה, משפטי דה-מורגן, איחוד כללי, חיתוך כללי, קבוצת החזקה, זוג סדור, מכפלה קרטזית.

2. **יחסים:** יחס, יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, יחס שקילות, הסגור הטרנזיטיבי של יחס, מחלקת השקילות, חלוקה, היחס המושרה ע"י חלוקה, קבוצת המנה.

3. **יחסי סדר:** סדר חלקי, דיאגרמות Hasse, איבר מינימלי, איבר מקסימלי, איבר קטן ביותר (קטן מכל האחרים), איבר גדול ביותר, היחס ההפוך, חסם מלעיל/מלרע, חסם עליון /סופרמום, חסם תחתון/אינפימום, שריג, סדר מלא/קווי.

4. **פונקציות:** תחום ותמונה של יחס, יחס חד-ערכי, פונקציה, פונקציה חח"ע, פונקציה על, הרכבת פונקציות, מסקנות מחח"ע/על של הרכבה, פונקצית הזהות, פונקציה הפיכה, יחידות ההופכית, אפיון הפיכה כחח"ע ועל, תמונה ומקור של קבוצות, תמונה הפוכה ותמונה של איחוד/חיתוך, הפונקציה המצומצמת, פונקציות מוגדרות היטב על קבוצת מנה.

5. **לוגיקה על קצה המזלג:** קשרים לוגיים, טבלאות אמת, שקילות לוגית, חוקי דה מורגן, הצגת קשרים אחרים בעזרת $\vee,\neg$, הוכחה בדרך השלילה.

6. **השוואת עוצמות:** שויון עוצמות, קבוצה סופית/אינסופית, $|\mathbf{N}| = \aleph_0$, המלון של הילברט, $|A| \le |B|$ (מוגדר היטב, רפלקסיבי וטרנזיטיבי), קב' בת-מניה, אלף-אפס הוא הקטן מכל העוצמות האינסופיות, הקשר בין עוצמות כשיש פו' על, משפט קנטור-ברנשטיין.

7. **הלמה של צורן ומשפט הסכום והמכפלה של עוצמות:** שרשרת בסדר חלקי, הלמה של צורן (עבור סדר חלקי ועבור משפחת קבוצות עם הכלה), מלאות אי"ש עוצמות, סכום עוצמות, מכפלת עוצמות, עוצמת הרציונלים, איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה, משפט קנטור על עוצמת קבוצת החזקה.

8. **חזקות של עוצמות ועוצמת הרצף:** חזקת עוצמות, פונקציות אופייניות, העוצמה של קבוצת החזקה, עוצמת הרצף, תכונות בסיסיות של חזקות של עוצמות, עוצמה של איחוד משפחה של קבוצות.

9. **מבוא לקומבינטוריקה:** עיקרון הסכום, עיקרון המכפלה, תמורות, בחירה של איברים מתוך קבוצה סופית (עם/בלי סדר, ועם/בלי חזרות).

10. **מקדמים בינומיים ומולטינומיים:** זהות פסקל, משפט הבינום, משולש פסקל, מקדמים מולטינומיים.

11. **הכלה והדחה, שובך היונים:** עיקרון ההכלה וההדחה, אי סדר מלא, עיקרון שובך היונים.

12. **נוסחאות נסיגה:** משוואת הפרשים ליניארית הומוגנית, הפולינום האופייני, תנאי התחלה, פתרון המשוואה, משוואה לא הומוגנית, פתרון פרטי ופתרון כללי (סכום פתרון פרטי ללא-הומוגנית וכללי להומוגנית).

פרק 1 : קבוצות ופעולות עליהן

הערה. חלק נכבד מהדוגמאות יש לעשות בתרגיל. במהלך ההוכחות יינתן דגש על ניסוח נכון של הוכחה (כגון: הוכחת טענות מהצורה "לכל x מתקיים..." יתחילו ב"יהי נתון x כלשהו...") ושאר עניינים בסיסיים.

1. **קבוצה**, **איברים**, **השתייכות** $\in$, אי השתייכות $\notin$.

2. **תיאור קבוצה ע"י רשימה**. דוגמא: $A=\{1,2,3\}$, $\mathbf{N}=\{1,2,3...\}$, $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,...\}$.

3. **תיאור קבוצה ע"י תכונה**. דוגמא: $A=\{x \in \mathbf{N} : 0<x<4\}$. הרציונלים: $\mathbf{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbf{Z}, b\neq 0\}$, הממשיים: $\mathbf{R}$ (ללא הגדרה).

4. **הכמתים** $\forall, \exists$.

5. **שוויון קבוצות**: $A=B$ פירושו: ל A ול B אותם איברים: $(\forall x)\ x\in A \Leftrightarrow x\in B$.
סדר וריבוי אינם חשובים.
אי שוויון $A\neq B$. ניסוח בעזרת כמתים. דיון כללי ב**שלילה של כמתים**.

5. **הכלה**, קבוצה חלקית/תת-קבוצה: $A\subseteq B$ פירושו $(\forall x)\ x\in A \Rightarrow x\in B$.
אי הכלה. ניסוח בעזרת כמתים.
תכונות הכלה: רפלקסיביות, טרנזיטיביות, אנטי-סימטריות.

6. הסכם: {שקר $\Leftarrow$ משהו } הוא אמת.

7. **קבוצה ריקה**. יחידות. סימון: $\varnothing$.
$\varnothing$ מוכלת בכל קבוצה.

8. **איחוד**: $A\bigcup B=\{x : x\in A$ או $x\in B\}$. **דיאגרמת וון**. **לוח השתייכות**:

A	B	$A\bigcup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

תכונות איחוד: $A\bigcup\varnothing=A$, $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\bigcup B=B$. $A\cup B=B\cup A$.

9. **חיתוך**: $A\bigcap B=\{x : x\in A$ וגם $x\in B\}$. דיאגרמת וון ולוח השתייכות.
תכונות: $A\cap B=B\cap A$. $B\subseteq A \Leftrightarrow A\cap B=B$.

10. **קבוצות זרות**.

11. **הפרש**: $A\setminus B=\{x\in A : x\notin B\}$. דיאגרמת וון ולוח השתייכות.
תכונות: $A\setminus\varnothing=A$, $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\setminus B=\varnothing$, לא סימטרי.

12. **הפרש סימטרי**: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
תכונות: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, סימטרי.

13. **קיבוץ/אסוציאטיביות**: $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$, וכן עבור חיתוך והפרש סימטרי (הוכחה בעזרת לוח השתייכות).

14. **פילוג/דיסטריביוטיביות:**

$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$, $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

15. **משלים בתוך קבוצה** U: $A'=A^c=\{x\in U: x\notin A\}$.
דיאגרמת וון ולוח השתייכות.
תכונות: $U'=\varnothing$, $\varnothing'=U$, אם $A\subseteq B$ אזי $B'\subseteq A'$, $(A')'=A$,
$A\cap A^c=\varnothing, A\cup A^c=U, B\cap A^c=B\setminus A$.

(אופציונאלי) מדוע המשלים הוא בתוך קבוצה: **הפרדוקס של ראסל**.

16. **משפטי דה-מורגן**. $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$. $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$.

17. **איחוד כללי**: יהיו $A_1,\dots,A_n$ קבוצות. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש- $1\le i\le n$ קיים$\}$.

$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש- $i\in I$ קיים$\}$.

דוגמא: לכל $k\in\mathbf{N}$ תהי $A_k=[-k,k]$, אז $\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k=\mathbf{R}$.

18. **חיתוך כללי**, כנ"ל. דוגמא: לכל $k\in\mathbf{N}$ $A_k=(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})$. אז $\bigcap_{k\in N}A_k=\{0\}$

19. $P(A)=\{B: B\subseteq A\}$ היא **קבוצת החזקה** של A .

דוגמא: $A=\{0,1\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},A\}$. $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

20. **זוג סדור** (a,b) והגדרת שוויון זוגות סדורים. הסדר משנה.
דוגמא: $B=\{1,2\}$, $A=\{$כלב, חתול$\}$, $A\times B=\{$(חתול, 1), (חתול, 2), (כלב, 1), (כלב, 2)$\}$.

21. **מכפלה קרטזית** $A\times B$. דוגמא: $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ - המישור.

22. ***n*-יה סדורה**, **המכפלה הקרטזית** של $A_1,\dots,A_n$:
$A_1\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots,a_n): 1\le i\le n$ לכל $a_i\in A_i\}$.
סימון: $A^n=\underbrace{A\times\dots\times A}_{n}$.
דוגמא: $\mathbf{R}^n$.

פרק 2: יחסים

1. קבוצה חלקית R של $A\times B$ נקראת **יחס** מ- A ל- B. אם A=B אומרים שזה **יחס על** A.

2. סימון: יהי R יחס מ- A ל- B אזי $(a,b)\in R$ יסומן aRb.

דוגמא: תהי A קבוצת אנשים. היחס Wt מ- A ל- $\mathbf{N}$ הוא $Wt=\{(a,$ משקלו של $a): a\in A\}$.
$Wt\ni(70,$ חיים$)$ יסומן $70\ Wt$ חיים.

3. **יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, יחס שקילות**. דוגמאות.
יחסים מיוחדים על קבוצה A: היחס הריק $\varnothing$, **יחס הזהות** id_A, **היחס המלא** $A\times A$.

4. בתירגול: הרכבת יחסים, **הסגור הטרנזיטיבי של יחס**.

6. יהי R יחס שקילות על A ויהי $a\in A$. **מחלקת השקילות של** a $=[a]_R$. מסומנת $[a]$ כאשר R ברור מההקשר.
רשימת תכונות השקולות ל $[a]=[b]$.
א) $[a]=[b]$.
ב) $a\in[b]$.
ג) $a\approx b$.
ד) $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

4. **חלוקה** $\{A_i: i\in I\}$ של קבוצה A. דוגמאות.

8. יהי R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R: a\in A\}$ הוא חלוקה של A.
דוגמאות. היחס $a\equiv b \mod n$.

5. יהי $\{A_i: i\in I\}$ חלוקה של A, אזי $R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ הוא יחס שקילות על A. קוראים לו **היחס המושרה** ע"י החלוקה.

דוגמאות: לכל $i\in N$ תהי $A_i=\{x\in R: i\le x<i+1\}$. האוסף $\{A_i: i\in N\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס המושרה הוא $\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.

9. מסקנה: קיימת התאמה בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A.

10. **קבוצת המנה** $A/\sim$.

11. דוגמאות: הרציונלים (1/2=2/4); $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (לעת עתה, בלי הגדרת חיבור וכפל עליהם).

12. (בתרגיל) שאלת הכובעים: סדרה אינסופית של אנשים עומדת בטור עם הגב לתחילת הטור, כ"א עם כובע אדום או ירוק, וכ"א רואה את כל מי שלפניו (כולם פרט למס' סופי). רוצים שכ"א ינחש את צבע כובעו כך שיהיה מספר סופי של טעויות, מבלי לשתף פעולה. (פתרון: עבור $f,g: N\to\{red, green\}$ נגדיר $f\sim g$ אם הן שוות פרט למספר סופי. קיבלנו יחס שקילות על S, משפחת כל הפו' כנ"ל. ניקח $f: S/\sim\to S$, כך ש $f([s])\in[s]$ לכל s. כל איש מתבונן בסדרה שלפניו ומשלימה באופן שרירותי, ועונה לפי הנציג ש f בוחרת ממחלקת השקילות שלה). הערה: אם הם מקשיבים לתשובות שניתנו לפניהם, אפשר לסדר שיהיה לכל איש טעות אחת לכל היותר, בעזרת קסור של התשובות לגבי המקומות ששונים מהנציג.

פרק 3: יחסי סדר

1. **סדר חלקי** ($\leq$): רפלקסיבי, טרנזיטיבי, אנטיסימטרי. דוגמאות, עם **דיאגרמות Hasse** (בפרט, $P(\{1,2,3\})$ עם הסדר החלקי $\subseteq$).

2. איבר **מינימלי**, איבר **מקסימלי**, איבר **קטן ביותר** (קטן מכל האחרים), איבר **גדול ביותר** (גדול מכל האחרים).
יחידות האיבר הקטן ביותר (והגדול ביותר).
ההבדל בין קטן ביותר למינימלי (דוגמאות).

3. **היחס ההפוך** $R^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in R\}$, כלומר $(\forall x,y)\ xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.
$(R^{-1})^{-1}=R$.
איבר הוא מינימלי בסדר חלקי R או"א הוא מקסימלי בסדר ההפוך R^{-1}. וכן עבור ראשון/אחרון.

4. **חסם מלעיל/מלרע**, **חסם עליון /סופרמום** (חסם מלעיל קטן ביותר), **חסם תחתון/אינפימום** (חסם מלרע גדול ביותר).

דוגמא: היחס "מחלק את" על הטבעיים. הסופרמום הוא כמק"ב (lcm), והאינפימום הוא ממג"ב (gcd).

5. **שריג**: סדר חלקי בו לכל שני איברים יש סופרמום ואינפימום.

הדוגמא של "מחלק את" על הטבעיים היא שריג.

6. **סדר מלא/קוי**. דוגמאות.

7. בסדר **מלא**, מקסימלי = קטן ביותר, ומינימלי = גדול ביותר.

8. (בתרגיל) **קדם-סדר חלקי**: רפלקסיבי וטרנזיטיבי. (דוגמא: היחס "מחלק את" מעל השלמים.)
הגדרת יחס שקילות על קדם סדר: $a \sim b$ אם כל אחד קודם לשני. היחס המושרה על קבוצת המנה $A/\sim$ הוא קדם סדר. (דוגמא: $Z/\sim$ הוא אותו סדר חלקי כמו הטבעיים עם היחס "מחלק את".)

פרק 4: פונקציות

1. הגדרה: **תחום** של יחס $\mathrm{dom}(R)$, **תמונה** של יחס $\mathrm{im}(R)$, יחס **חד-ערכי**.

2. **פונקציה** $f : A \to B$. היא יחס חד-ערכי $R \subseteq A \times B$ שתחומו A.
$(a,b) \in f$ יסומן $f(a) = b$.
דוגמא: $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c,d\}$, $f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = a$.

3. **פונקציה חח"ע**. דוגמאות.

4. **פונקציה על**. דוגמאות.

5. **הרכבת פונקציות**: $f : A \to B, g : B \to C$ אזי $g \circ f : A \to C$ מוגדרת ע"י $g \circ f(a) = g(f(a))$ לכל $a \in A$. דוגמאות.

6. $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ אזי $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

7. $f \circ g$ חד חד ערכית $\Leftarrow$ g חד חד ערכית. $f \circ g$ על $\Leftarrow$ f על.

8. **פונקצית הזהות** id_A .
$f : A \to B$ אזי $f \circ id_A = f$ ו- $id_B \circ f = f$.

9. פונקציה $f : A \to B$ היא **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש- $g \circ f = id_A$ ו- $f \circ g = id_B$. אם f היא הפיכה אזי g הנ"ל היא יחידה ותסומן f^{-1} . דוגמאות.

10. פונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה אם ורק אם f היא חח"ע ועל.

11. עבור $f : X \to Y$ וקבוצות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$,
$f^{-1}[B] = \{a : f(a) \in B\}$.

12. תמונה הפוכה ותמונה של איחוד/חיתוך: $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$, וכן לגבי חיתוך. מה קורה עם תמונה (יש הכלה), ומתי יש שויון. תמונה הפוכה של תמונה ותמונה של תמונה הפוכה.

13. **הפונקציה המצומצמת** $f|_A : A \to Y$.

14. (בתרגיל) **הרחבה משותפת של פונקציות**: לאוסף $\{f_i : i \in I\}$ של פונקציות מתיישבות, $h = \bigcup_{i\in I} f_i$ מרחיבה את כולן, $dom(h) = \bigcup_{i\in I} dom(f_i)$, $im(h) = \bigcup_{i\in I} im(f_i)$.

15. **פונקציות מוגדרות היטב על קבוצת מנה** $A/\sim$.

16. דוגמאות: מוגדרות טובה של הפעולות על הרציונלים (חיבור, כפל, חילוק).
חיבור וכפל על $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ מוגדרים היטב.
דוג' של פו' שאינן מוגדרת היטב.
(אופציונאלי לתרגיל: בניית השלמים מהטבעיים בעזרת מחלקות שקילות.)

פרק 5 : לוגיקה על קצה המזלג

הערה. פרק קצרצר זה לא צריך לקחת יותר משעה אקדמית אחת. ניתן לראותו כדוגמא/יישום של פונקציות, ובמידת הצורך לשלבו בתרגיל בלבד.

1. **קשרים לוגיים** כפונקציות של ערכי אמת T, F.

2. **טבלאות אמת.**

3. **שקילות לוגית** : אם הפונקציות שוות (ניתן לבדיקה בעזרת טבלת אמת).

4. שקילויות לוגיות בסיסיות : **חוקי דה מורגן**, **הצגת קשרים** אחרים בעזרת $\vee,\neg$, **הוכחה בדרך השלילה** (א $\Leftarrow$ ב) $\Leftrightarrow$ (ב $\neg$ $\Leftarrow$ א $\neg$).

פרק 6 : השוואת עוצמות

הערה. אפשר לדלג על ההגדרה של עוצמה של קבוצה ולהגדיר ישירות שוויון ואי-שוויון עוצמות. למשפטים נבחרים (למשל, קנטור-ברנשטיין) אפשר לתת הוכחה לקריאה עצמית.

1. הגדרה : $A \approx B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל. $\approx$ "יחס שקילות" על אוסף כל הקבוצות.

2. $[A] = \{B \mid A \approx B\}$. **העוצמה של קבוצה** A, מסומנת $|A|$, היא "מחלקת השקילות" $[A]$ ביחס ל- $\approx$.

3. $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (זו "הגדרה" אם מדלגים על הגדרת עוצמה לעיל.)

4. אם $A \approx \{1, \cdots, n\}$, נסמן $|A| = n$.

5. A **סופית** אם יש n טבעי או 0 כך ש- $|A| = n$. אחרת, A **אינסופית**.
דוגמא : $\mathbf{N}$ אינסופית. $\{5,9,13\}$ סופית.

6. סימון : $|\mathbf{N}| = \aleph_0$. **המלון של הילברט** : $|N| = |N_0|$, $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$.

7. הגדרה : $|A| \le |B|$ אם יש $f : A \to B$ חח"ע. אם $|A| \le |B|$ ו- $|A| \ne |B|$, נסמן : $|A| < |B|$.

8. $\le$ בין עוצמות מוגדר היטב, והוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

9. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \le |B|$.

10. קבוצה A היא **בת-מניה** אם $|A| \le \aleph_0$.
דוגמא : $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \varnothing$ וכל קבוצה סופית הן בנות-מניה.

11. מסקנה : כל תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה.

12. $|A| \le |B| \Leftrightarrow$ יש פונקציה $f : B \to A$ שהיא על.

13. לכל קבוצה אינסופית A, יש תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$ (ז"א $\aleph_0 \le |A|$).

14. **משפט קנטור-ברנשטיין:** $|A| \le |B| \,\&\, |B| \le |A| \to |A| = |B|$.

פרק 7: הלמה של צורן ומשפט הסכום והמכפלה של עוצמות

1. תזכורת: **יחס סדר חלקי ומלא**, איבר מקסימלי ומינימלי.

2. **שרשרת** בסדר חלקי.

2. **הלמה של צורן**. תהא P קבוצה לא ריקה, עם סדר חלקי $\leq$. אם לכל שרשרת של איברים ב P יש חסם מלעיל ב P, אז יש ב P איבר מקסימלי. (הוכחה תינתן בקורס "תורת הקבוצות".)
שקול לנסח עבור קיום איבר מינימלי (רמז: הסדר ההפוך).

3. מסקנה: **הלמה של צורן עבור משפחה של קבוצות עם הכלה**.

4. (בתרגיל) **משפט.** יהיו V מרחב וקטורי, ו I תת-קב' בת"ל. אזי יש בסיס של V המכיל את I. (בפרט, לכל מרחב וקטורי, גם אם אינו נוצר סופית, יש בסיס.)

הלמה תשמש, בצורה דומה, להוכחת משפטים בקורסים: אלגברה מופשטת (כל אידיאל מוכל באידיאל מקסימלי), טופולוגיה (משפט טיכונוף), אנליזה פונקציונלית (משפט האן-בנך).

5. **משפט:** היחס $\leq$ בין עוצמות הוא מלא, ז"א: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים או $|A| \leq |B|$ או $|B| \leq |A|$.

6. **סכום עוצמות:** κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ והקבוצות A,B *זרות*, אז: $\kappa + \lambda = |A \cup B|$.

7. **משפט הסכום:** לעוצמות אינסופיות, $\kappa + \kappa = \kappa$ (מלמת צורן).

8. מסקנה: אם אחת העוצמות אינסופית, $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

9. **מכפלת עוצמות:** κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ אז: $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$.

10. **משפט המכפלה:** לעוצמות אינסופיות, $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ (מלמת צורן).

11. מסקנה: אם אחת העוצמות אינסופית (והשניה אינה 0), $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

12. מסקנה: $|\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

13. מסקנה: איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה.

14. **משפט קנטור:** לכל קבוצה A, מתקיים: $|A| < |P(A)|$.

15. מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות שונות.

פרק 8: חזקות של עוצמות ועוצמת הרצף

1. סימון: $A^B=\{f \mid f: B\to A\}$.

2. **חזקת עוצמות**: κ,λ עוצמות. אם $|A|=\kappa, |B|=\lambda$ אז: $\kappa^\lambda=\left|A^B\right|$.

3. **פונקציות אופייניות.**

4. לכל קבוצה A, מתקיים $|P(A)|=\left|\{0,1\}^A\right|$. (הוכחה בעזרת פונקציות אופייניות).

5. מסקנה: $|P(A)|=2^{|A|}$.

6. מסקנה ממשפט קנטור: לכל עוצמה κ, מתקיים $\kappa<2^\kappa$.

7. **עוצמת הרצף:** $\mathbf{c}=|R|$.

8. לכל שני מספרים ממשיים $a<b$ מתקיים: $|(a,b)|=\mathbf{c}$ ($\left|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right|=\mathbf{c}$ בעזרת tg).

9. $\mathbf{c}=2^{\aleph_0}$. בפרט, $\aleph_0<\mathbf{c}$.
(הוכחה: לכל $x\in(0,1)$ יש פיתוח בינארי מהצורה $0.r_1r_2\ldots$.
מצד שני, לכל סדרה $(r_1,r_2,\ldots)\in\{0,1\}^N$ נתאים את המספר $0.r_10r_20\ldots$.
נפעיל את קנטור-ברנשטיין.)

10. הפעולות של חיבור וכפל עוצמות מקיימות קיבוץ, חילוף ופילוג.
(הוכחת הפילוג: $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$).

11. תכונות של חזקות של עוצמות:
א. $(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$.
ב. $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$.
ג. $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$.
ד. אם $\kappa\le\lambda$ אז $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$.
ה. אם $0<\lambda\le\mu$ אז $\kappa^\lambda\le\kappa^\mu$.
ו. $1^\kappa=1, \quad \kappa^0=1$
ז. אם $0<\kappa$, אז $0^\kappa=0$

12. אם $2\le\kappa\le2^\lambda$, ו- λ אינסופית, אז $\kappa^\lambda=2^\lambda$.

13. דוגמאות: $\mathbf{c}^{\aleph_0}=\mathbf{c}=2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$, $\left|\mathbf{R}^\mathbf{N}\right|=\mathbf{c}^{\aleph_0}=\mathbf{c}$.

14. **עוצמה של איחוד משפחה של קבוצות**: אם כל $|A_i|\le\kappa$, אז $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\le|I|\cdot\kappa$.

15. דוגמא: קבוצת כל הסדרות הסופיות בא"ב סופי או בן-מניה, היא מעצמה $\aleph_0$.

פרק 9: מבוא לקומבינטוריקה

מקרים פרטיים של חשבון עוצמות

1. **עיקרון הסכום:** A,B קבוצות סופיות זרות, ז"א $A\bigcap B=\varnothing$, אזי $|A\bigcup B|=|A|+|B|$.

2. דוגמא: ישנם 20 בנים ו- 25 בנות בכיתה. מס' הילדים בכיתה הוא 45 .

3. **עיקרון הסכום המורחב.** אם $A_1,\dots,A_n$ הן קבוצות סופיות זרות בזוגות, אז $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

4. **עיקרון המכפלה.** אם A,B הן קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A||B|$.

5. דוגמא: חברה מייצרת מכוניות מדגם א', ב', ו- ג'. ניתן להזמין כל דגם בצבעים לבן, כחול ואדום. מס' הדרכים להזמין מכונית מן החברה הוא 9.

6. **עיקרון המכפלה המורחב.** אם $A_1,\dots,A_n$ הן קבוצות סופיות, אז $|A_1\times\cdots\times A_n|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$.

7. דוגמא: רשיון רכב מורכב משתי אותיות בין $A-Z$, ואחריהן ארבע ספרות בין 0-9. מס' הרשיונות האפשריים הוא $26^2\cdot 10^4$.

תמורות

8. $|A|=n$. **תמורה של** A היא סידרה עם n איברים, כל איבר של A הוא איבר של הסידרה. מס' התמורות של A הוא $n!$.

בחירה של איברים מתוך קבוצה סופית (עם/בלי סדר, ועם/בלי חזרות)

9. **בעיה כללית.** למצוא מס' הדרכים לבחור k איברים מתוך קבוצה A בעלת n איברים – יש שני פרמטרים: הסדר חשוב או לא חשוב, והאם יש חזרות או לא.

10. **מקרה א' - הסדר חשוב, ואין חזרות:** מס' הדרכים הוא $n!/(n-k)!$.
דוגמא: לבחור ועד כיתה מורכב מ- יו"ר, סגן, וגזבר.

11. בעיה שקולה לסעיף (10): מס' הדרכים למלא k תאים (מסודרים) שתכולתם 1 על ידי n כדורים שונים.

12. **מקרה ב' - הסדר לא חשוב ואין חזרות:** מס' הדרכים הוא $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (שהוא מספר תת-הקבוצות בגודל k בקבוצה בגודל n).
דוגמא: בחירת ועד כיתה של שלשה תלמידים, כולם שווים.

13. מסקנה: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. משמעות שוויון זה לגבי הנ"ל.

14. בעיה שקולה לסעיף (12): מס' הדרכים לחלק k חפצים זהים ל n תאים, כשתכולת כל תא חפץ אחד.

15. **מקרה ג' - סדר חשוב עם חזרות:** מס' הדרכים הוא n^k. **דוגמא:** בגלגל רולטה ישנם מס' מ- 0-35. מס' התוצאות האפשריות ב- 10 סיבובים הוא 36^{10}.

16. בעיה שקולה לסעיף (15): מס' הדרכים לחלק k חפצים שונים לתוך n תאים. תכולת כל תא היא בלתי מוגבלת.

17. **מקרה ד' - סדר לא חשוב, עם חזרות, k מתוך n:** מס' הדרכים הוא $\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$.

18. בעיה שקולה לסעיף (17): חלוקת k חפצים זהים לתוך n תאים, תכולת כל תא בלתי היא מוגבלת.

19. דוגמא: מטבעות הם מסוג 10 אג', חצי שקל, ושקל. מס' הדרכים לתת 5 מטבעות הוא $\binom{7}{5}$.

20. דוגמא: מס' הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים הוא $\binom{13}{10}$.

21. דוגמא: כנ"ל, רק סכום של מס' חיוביים. מס' הפתרונות הוא $\binom{9}{6}$.

22. דוגמא: מס' הפתרונות של אי השוויון $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים הוא מס' הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+y=10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים, והוא $\binom{14}{10}$.

פרק 10: מקדמים בינומיים ומולטינומיים

1. **זהות פסקל:** $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

2. **משפט הבינום**: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, ולכן אם $|A|=n$ אזי $|P(A)|=2^n$.

4. הצבת $x=-1$ ו- $y=1$ במשוואה $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ נותן $0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, או $-1=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ ולכן $1=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}$.

5. **משולש פסקל**.

6. **מקדמים מולטינומיים:** ישנם חפצים מ- k סוגים שונים. מס׳ הדרכים לבנות סידרה המורכבת מ- n_1 חפצים מסוג 1, ..., n_k חפצים מסוג k הוא $\frac{(n_1+\cdots+n_k)!}{n_1!\cdots n_k!}=\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$.

7. בעיה שקולה לסעיף (6): מס׳ הדרכים לחלק n_1 חפצים מסוג 1, ..., n_k חפצים מסוג k לתוך $n_1+\cdots+n_k$ תאים. תכולת כל תא היא חפץ אחד.

8. דוגמא: מס׳ המילים שניתן להרכיב משתי אותיות A, שלוש אותיות B, ושלוש אותיות C הוא $\frac{8!}{2!3!3!}$.

9. **הכללה של משפט הבינום:** $(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}$.

פרק 11: הכלה והדחה, שובך היונים

10. עקרון ההכלה וההדחה, $k=2$: $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$. דוגמא.

11. עקרון ההכלה וההדחה, $k=3$:
$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|-|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|$. דוגמא.

12. **עיקרון ההכלה וההדחה ל- k קבוצות:**

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

13. **אי סדר מלא** של 1 עד n הוא תמורה של 1 עד n שבה כל מס׳ איננו במקומו.
דוגמא: הצפנות על ידי החלפת אותיות (א״ת ב״ש, צופן יוליוס קיסר).

14. מס׳ אי הסדרים המלאים של 1 עד n הוא $n!(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})$.

15. דוגמא: ארבעה עיוורים לוקחים ארבעה ארנקים. מס׳ הדרכים שבהם אף אחד מהם לקח את ארנקו הוא 9.

16. **עיקרון שובך היונים**: יהיו A,B קבוצות סופיות, $|A|>|B|$, אזי פונקציה $f:A\to B$ איננה חח״ע. למעשה, יש $b\in B$ שיש לו לפחות $|A|/|B|$ מקורות.

17. דוגמא: הוכח שבבחירת 6 מספרים מתוך 0-9, יש שניים שסכומם 9. הרעיון: חלוקה לזוגות שסכום כל זוג הוא 9.

18. דוגמא: נתון לוח מטרה בצורת משולש שווה צלעות, שאורך כל צלע הוא 2 מטר. הוכח שאם צלף יורה 5 חיצים, יהיה זוג חיצים שיפול במרחק קטן או שווה למטר.

19. דוגמא: 9 נקודות בריבוע 2×2 אזי ישנן 3 מבין נקודות אילו עם מרחק ביניהן $\le\sqrt{2}$.
דוגמא: אם בסדרה $a_1,\ldots,a_k$ מופיעים $\sqrt{k}$ או פחות ערכים, אז יש ערך שחוזר על עצמו לפחות $\sqrt{k}$ פעמים בסדרה.

פרק 12: נוסחאות נסיגה

1. דוגמאות לבנייה של נוסחאות נסיגה על סמך בעיה קומבינטורית: סדרת פיבונאצ'י, מגדלי האנוי, מספר תת-קבוצות מגודל נתון.

2. פונקציה $f:\mathbf{N}_0 \to B$ היא מוגדרת **רקורסיבית** אם הערכים $f(0),\ldots,f(k-1)$ נתונים, ולכל $f(n), n\ge k$ מוגדרת כביטוי ב- $f(n-1),\ldots,f(n-k)$. **דוגמא:** סדרת פיבונאצ'י.

3. דוגמא: $f(n)$ = מס' הסדרות מאורך n, כל איבר הוא 0, 1, או 2 ומס' האפסים הוא זוגי. $f(n)=\dfrac{3^n+1}{2}$.

4. **משוואת הפרשים** מסדר k היא ביטוי מהצורה $F[f(n+k), f(n+k-1),\ldots,f(n)]=0$.

5. **פתרון המשוואה** הוא פונקציה $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{R}$ המקיימת את המשוואה.

6. **משוואת הפרשים ליניארית** מסדר k היא משוואה מהצורה
$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+a_2 f(n+k-2)+\cdots+a_k f(n)+g(n)$$
כאשר $a_1,\ldots,a_k$ הם קבועים. אם $g(n)=0$, המשוואה נקראת **הומוגנית**.

7. **הפולינום האופייני** של המשוואה הליניארית בסעיף (3) הוא $p(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_k$. **המשוואה האופיינית** של המשוואה היא $p(x)=0$.

8. **תנאי התחלה**: נתונים ערכים של $f(0),\ldots,f(k-1)$.

9. **מקרה א' - כאשר יש למשוואה האופיינית** k **פתרונות ממשיים שונים** $x_1,\ldots,x_k$: הפתרון של המשוואה ההומוגנית בסעיף (3) הוא $f(n)=c_1x_1{}^n+\cdots+c_kx_k{}^n$.

10. דוגמא: סדרת פיבונאצ'י $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$, תנאי התחלה $f(0)=f(1)=1$.

11. **מקרה ב' - כאשר** x_i **הוא שורש ממשי עם ריבוי** d, דהיינו $p(x)=(x-x_i)^d q(x)$ כאשר $q(x_i)\ne 0$: התרומה של x_i לפתרון היא $c_0x_i{}^n+c_1nx_i{}^n+\cdots+c_{d-1}n^{d-1}x_i{}^n$.

12. דוגמא: $f(n+3)=-5f(n+2)-3f(n+1)+9f(n)$ כאשר $f(0)=2, f(1)=-5, f(2)=28$.

13. **משוואה לא הומוגנית**: פתרון כללי של משוואה לא הומוגנית הוא $h(x)+u(x)$ כאשר $h(x)$ הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה, ו- $u(x)$ הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית.

14. **פתרון פרטי למקרה הלא-הומוגני** – חיפוש פתרון פרטי על ידי ניחוש פתרון הדומה בנוסחאתו ל- $g(n)$. אם $g(n)=c$ היא פונקציה קבועה ו- $a_1+\cdots+a_k\ne 1$, אז $u(n)=\dfrac{c}{1-(a_1+\cdots+a_k)}$ הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית.

15. **דוגמא:** $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)+7$ כאשר $f(0)=1, f(1)=2$.