תרגיל 6 – לינארית 2 למדמ"ח

1. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 77 והלאה: 9.4; 9.7;
9.7:

פתרון:

א. $AdjA=\begin{pmatrix} z-1 & 1-\bar{z} & |z|(\bar{z}-z) \\ 1-\bar{z} & z-1 & |z|(\bar{z}-z) \\ \frac{1}{|z|}(\bar{z}-z) & \frac{1}{|z|}(\bar{z}-z) & z^2-\bar{z}^2 \end{pmatrix}$,

$$|A|=z(z-1)+\bar{z}(1-\bar{z})+|z|\frac{1}{|z|}(\bar{z}-z)=\bar{z}^2-z^2+2(\bar{z}-z)=(z+\bar{z})(\bar{z}-z)+2(\bar{z}-z)=$$

$$=(\bar{z}-z)(z+\bar{z}+2)=$$

ב. המטריצה הפיכה כאשר הדטרמיננטה שונה מאפס. קל לראות מהדטרמיננטה לעיל, שזה קורה אם"ם z ממשי (אחרת החלק המדומה לא מתאפס)

ג. $A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}$

2. מהחוברת של ד"ר בועז צבאן, עמוד 81 והלאה: 1.9;

1.9:

פתרון:

לפי ההגדרה סכום כל עמודה הוא אחד, ולכן סכום כל שורה במטריצה המשוחלפת הוא אחד.

$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, הרי הכפל הזה הוא סכום העמודות של המטריצה המשוחלפת. לכן הוקטור

העצמי הינו $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ והערך העצמי הינו אחד בכבודו ובעצמו.

3. תהי מטריצה ריבועית $A\in F^{n\times n}$. נסמן את הפולינום האופייני שלה ב $f_A(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$. הוכח ש $a_0=(-1)^n|A|$

פתרון:

$$a_0=f_A(0)=|0I-A|=(-1)^nA$$

4. תרגיל מודרך: תהי מטריצה $A\in F^{n\times n}$ כך שסכום הריבויים הגיאומטריים של הע"ע שלה שווה ל n (תזכורת: הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ הינו המימד של המרחב העצמי $\dim V_\lambda=\dim\{v\mid Av=\lambda v\}$). הוכח שקיימת מטריצה הפיכה P כך שהמכפלה $D=P^{-1}AP$ הינה מטריצה אלכסונית.

a. הוכח שניתן לבנות בסיס ל F^n המורכב מו"ע עצמיים של A (תזכורת: ידוע כי ו"ע של ע"ע שונים הינם בת"ל)

הוכחה:

הריבוי הגיאומטרי הינו מימד המרחב העצמי, ולכן שווה למספר הוקטורים בבסיס המרחב העצמי. מכיוון שסכום הריבויים הגיאומטריים הוא n, ומכיוון שוקטורים עצמיים מע"ע שונים הם בת"ל, איחוד הבסיסים של המרחבים העצמיים נותן קבוצה בת"ל בגודל n ולפי השלישי חינם היא מהווה בסיס. מכיוון שאיבריה הם ממרחבים עצמיים, הקבוצה עצמה מכילה רק ו"ע.

b. נגדיר את P להיות מטריצה שעמודותיה הם הבסיס מהסעיף הקודם. הוכח שקיימת מטריצה אלכסונית D כך ש $AP=PD$ (רמז: מה קורה כאשר כופלים מטריצה בו"ע?)

הוכחה:

קל לראות ש

$$AP=A\left(C_1(P)\quad\cdots\quad C_n(P)\right)=\left(AC_1(P)\quad\cdots\quad AC_n(P)\right)=\left(\lambda_1C_1(P)\quad\cdots\quad\lambda_nC_n(P)\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\left(C_1(P)\quad\cdots\quad C_n(P)\right)=DP$$

(זכרו שעמודות המטריצה P הינם וקטורים עצמיים).

c. פתור את התרגיל

פתרון:

בנינו את המטריצה P כך שעמודותיה מהוות בסיס, ולכן היא הפיכה. נכפול בהופכית בשני צידי המשוואה של הסעיף הקודם לקבל $D=P^{-1}AP$.