תרגיל בית 1 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. תהא S חבורה למחצה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו $M = S \cup \{e\}$ עם איבר חדש $e \notin S$ כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של S באופן כזה ש-e הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

שאלה 2. יהא $M_0 = \{0\}$ מונואיד האפס. תארו את המונואיד המתקבל מחזרה של n פעמים על הבנייה מהשאלה הקודמת. כלומר עבור $i > 1$ נגדיר מונואיד $M_i = M_{i-1} \cup \{e_i\}$ שבו e_i הוא איבר היחידה החדש ואתם מתבקשים לומר כיצד נראה לוח הכפל של M_n.

שאלה 3. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא חבורה למחצה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. $(\mathbb{Z}, *)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ג. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ד. $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ה. $(\mathbb{R}, *)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \sqrt{a+b}$.

ו. תהי X קבוצה. $(P(X), \triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ז. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ח. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ט. הקבוצה הבאה ביחס לכפל מטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

שאלה 5. תהי קבוצה $S=\{a,b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S,*)$ היא:

א. חבורה למחצה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 6. תהינה שתי חבורות $(G,*)$, $(H,\bullet)$. עבור המכפלה הקרטזית $G\times H$ נגדיר את הפעולה $\cdot$ לפי $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$ עבור כל $g_1,g_2\in G$ וכל $h_1,h_2\in H$.
הוכיחו כי $(G\times H,\cdot)$ היא חבורה.

שאלה 7 (אתגר)**.** הוכיחו שאם בחבורה למחצה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax=b$ או $xa=b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e\in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae=a$. לכל $c\in S$ קיים x כך ש-$c=xa$, ואז $ce=xae=xa=c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

בהצלחה!