תרגיל בית 2 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב׳ תשע״ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו״ח.

שאלה 1. יהי p מספר ראשוני.

א. יהי R חוג בלי יחידה מסדר p. הוכיחו כי או ש-$R \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ עם חיבור וכפל מודולו p (של הנציגים), או $R \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \odot)$ עם חיבור מודולו p וכפל האפס שבו תמיד $x \odot y = 0$.

ב. תנו דוגמאות לחוגים עם יחידה מסדר p^2 שאינם איזומורפיים. רמז: יש ארבעה כאלו, עד כדי איזומורפיזם. נסו למצוא את כולם.

ג. העשרה: קראו את המאמר "מיון חוגים סופיים מסדר p^2" מאת בנג׳מין פיין וענו כמה חוגים בלי יחידה יש מסדר p^2q עבור $p \neq q$ ראשוני.

שאלה 2. הוכיחו שתת־הקבוצות הבאות הן אידאלים.

א. יהיו R_1, R_2 חוגים, ויהיו $I_i \lhd R_i$ אידאלים. הוכיחו $I_1 \times I_2 \lhd R_1 \times R_2$.

ב. יהי R חוג. הוכיחו $I = \{f \in R[x] \mid f(212) = 0\} \lhd R[x]$. מה יקרה אם נדרוש $f(212) = 1$ במקום?

ג. נסמן

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}, \qquad J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

הוכיחו ש-$I \leq_l M_2(\mathbb{Q})$ אידאל שמאלי ו-$J \leq_r M_2(\mathbb{Q})$ אידאל ימני. הוכיחו כי $I \cap J$ אינו אידאל.

שאלה 3. הפריכו את הטענות הבאות:

א. איחוד אידאלים הוא אידאל.

ב. יהיו $S \subseteq R$ חוגים, ויהי $I \lhd S$. אז $I \lhd R$.

ג. יהי R חוג. אז תת־החוג הבא הוא אידאל של $R \times R$:

$$\Delta = \{(r, r) \mid r \in R\} \subseteq R \times R$$

שאלה 4. נסמן $R = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

א. מצאו את ההומומורפיזם היחיד של חוגים $\varphi : \mathbb{Z} \to R$.

ב. מצאו כמה הומומורפיזמים של חוגים $\psi : \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] \to R$ ישנם. רמז: העזרו בסעיף הקודם והראו שהפתרון תלוי רק בתמונה $\psi(\sqrt[3]{2})$.

שאלה 5. הוכיחו שהדרישה לאבליות של החבורה החיבורית של חוג היא מיותרת. כלומר שניתן להסיק אותה משאר האקסיומות של חוג.

שאלה 6. הוכיחו שכל תחום שלמות סופי הוא שדה.

שאלה 7. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing \neq \tau \subseteq P(X)$.

א. נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A, B \in \tau$ גורר $A \cup B \in \tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $A \subseteq B \in \tau$ גורר $A \in \tau$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם τ סגורה לאיחוד והכלה.

ב. נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-τ אידאל אם רק אם קיים $C \subseteq X$ כך ש-$\tau = P(C)$.

ג. מצאו אידאל τ של $(P(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

שתי השאלות הבאות הן בסגנון דומה. נסו לפתור את זו שנראית לכם יותר מעניינת, ואז בדקו האם השאלה האחרת נראת לכם קלה יותר.

שאלה 8. יהי R חוג בלי יחידה, ויהי $I \leq_l R$ אידאל שמאלי. נסמן $I^+ = \{x \in R \,|\, xR \subseteq I\}$.

א. הוכיחו $I^+ \lhd R$ אידאל דו־צדדי.

ב. הוכיחו שאם $I \lhd R$, אז $I \subseteq I^+$.

ג. הוכיחו שאם R חוג (עם יחידה), אז $I^{++} = I^+$.

שאלה 9. יהי R חוג, ותהי $A \subseteq R$ תת־קבוצה. נגדיר את המאפס השמאלי של A להיות

$$\mathrm{Ann}_l(A) = \{x \in R \,|\, \forall a \in A, xa = 0\}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Ann}_l(A) \leq_l R$ אידאל שמאלי.

ב. הוכיחו שאם $A \leq_l R$, אז $\mathrm{Ann}_l(A) \lhd R$.

ג. נניח $A, B \subseteq R$ תת־קבוצות המכילות את 0. הוכיחו $\mathrm{Ann}_l(A + B) = \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_l(B)$.

בהצלחה!