תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
הערות הרצאה 9

0.1 ספירת מסלולים

תזכורת 0.1. תהי $\varphi\colon G \to S_X$ פעולה של חבורה G על קבוצה X. אז המייצב של $x \in X$ הוא

$$\operatorname{stab}(x) = \{g \in G \mid g * x = x\}$$

ולפי משפט מסלול־מייצב $|G| = |\operatorname{stab}(x)|\,|G * x|$.

$$G * x = \{g * x \mid g \in G\} = [x]$$

הגדרה 0.2. לכל $g \in G$ נגדיר את קבוצת נקודות השבת שלו תחת הפעולה

$$X^g = \{x \in X \mid g * x = x\}$$

למשל

$$X^e = X$$

ונסמן ב-X/G את קבוצת המסלולים של X תחת הפעולה של G. הקבוצה X היא איחוד זר של מסלולים

$$X = \bigcup_{O \in X/G} O$$

למה (למת ספירת המסלולים)**.** או הלמה של ברנסייד. מספר המסלולים $k = |X/G|$ מקיים

$$k\,|G| = \sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |\operatorname{stab}_G(x)|$$

הוכחה. נסמן קבוצה

$$A = \{(g, x) \mid g \in G, x \in X, g * x = x\} \subseteq G \times X$$

עכשיו נסכום על פני החבורה G והקבוצה X:

$$|A| = \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \delta_{x, g*x} = \sum_{g \in G} |X^g|$$

מצד שני, נזכר ש-X הוא איחוד זר של מסלולים ונחשב

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{x\in X}\sum_{g\in G}\delta_{x,g*x} = \sum_{x\in X}|\mathrm{stab}_G(x)| \\ &= \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|G*x|} = \sum_{O\in X/G}\sum_{x\in O}\frac{|G|}{|G*x|} = \sum_{O\in X/G}\sum_{x\in O}\frac{|G|}{|O|} \\ &= |G|\sum_{O\in X/G}|O|\frac{1}{|O|} = |G|\sum_{O\in X/G}1 = |G|\,k\end{aligned}$$

וסיימנו את ההוכחה. $\square$

הערה 0.3. כאשר G ו-X סופיות מקובל למצוא את ניסוח הטענה עם

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{stab}_G(x)|$$

כלומר מספר המסלולים הוא ממוצע מספר נקודות השבת של איברי g תחת הפעולה, או ממוצע גודל המייצבים.

דוגמה 0.4. החבורה S_n פועלת על $[n]$. הפעולה היא טרנזיטיבית, למשל i נשלח ל-j בעזרת החילוף (ij). לכן מספר נקודות השבת של תמורה אקראית היא 1. נשים לב כי

$$\mathrm{stab}_{S_n}(i) \cong S_{[n]\setminus\{i\}} \cong S_{n-1}$$

ואכן

$$1 = \frac{1}{n!}\sum_{x\in[n]}(n-1)!$$

מה עם המומנט השני? נסמן $X = [n]$. החבורה S_n פועלת על $X \times X$ לפי

$$\sigma * (i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$$

בעבר ראינו ש-S_n פועלת על $\binom{X}{2}$. מתקיים

$$|X^\sigma|^2 = |(X\times X)^\sigma|$$

או במילים i,j הן נקודות שבת של σ (יחד) בפעולה על X אם ורק אם הזוג הסדור (i,j) הוא נקודת שבת של σ בפעולה על $X\times X$.

נסמן ב-$\mathcal{F}$ את המשתנה המקרי הסופר את מספר נקודות השבת של תמורה אקראית (בהתפלגות אחידה), אז

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}^2] = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\sigma\in S_n}|X^\sigma|^2 = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\sigma\in S_n}|(X\times X)^\sigma|$$

לפי למת ספירת המסלולים האגף הימני שווה למספר המסלולים בפעולה של S_n על $X\times X$. נטען שיש בדיוק שני מסלולים:

- האלכסון $\Delta_X = \{(i,i) \,|\, i \in X\}$.
$$\sigma * (i,i) = (j,j)$$
כאשר $\sigma = (ij)$ היא החילוף ממקודם.

- המשלים לאלכסון $(X \times X) \setminus \Delta_X$. צריך להראות שאם $i \neq j$ וגם $k \neq l$ אז יש תמורה $\sigma \in S_n$ השולחת את (i,j) ל-(k,l).
אם $i = l$ וגם $j = k$ נבחר את $\sigma = (ij)$.
אחרת, אפשר לבחור את $\sigma = (ij)(kl)$. אם $i = k$ וגם $j = l$ מקבלים $\sigma = \mathrm{id}$.

לכן השונות של מספר נקודות השבת הוא $V(\mathcal{F}) = \mathbb{E}[\mathcal{F}^2] - \mathbb{E}[\mathcal{F}]^2 = 1$.

דוגמה 0.5. נתונה חנוכייה עגולה שבה השַּׁמָּשׁ באמצע. בכמה דרכים ניתן לסדר 8 נרות בצבעים אדום, ירוק וכחול כאשר סידורים נחשבים לשווים עד כדי סיבוב החנוכייה.

נסמן ב-X את קבוצת סידורי הנרות עם חשיבות לסיבוב.
$$X = \{(c_1, \ldots, c_8)\} \subseteq \{R, G, B\}^8$$
וברור $|X| = 3^8$. החבורה $G = \mathbb{Z}_8$ פועלת על X לפי סיבוב הנרות, למשל
$$1 * (c_1, \ldots, c_8) = (c_2, c_3, \ldots, c_8, c_1)$$
ואנחנו רוצים לחשב את $|X/G|$. נניח $\mathbb{Z}_8 = \langle a \rangle$, אז
$$\begin{aligned}
\left|X^{a^0}\right| &= 3^8 \\
\left|X^{a^1}\right| &= 3^1 \\
\left|X^{a^2}\right| &= 3^2 \\
\left|X^{a^3}\right| &= 3^1 \\
\left|X^{a^4}\right| &= 3^4 \\
\left|X^{a^5}\right| &= 3^1 \\
\left|X^{a^6}\right| &= 3^2 \\
\left|X^{a^7}\right| &= 3^1
\end{aligned}$$
מה שבאמת קורה קשור לשיכון קיילי $S_{\mathbb{Z}_8} \hookrightarrow \mathbb{Z}_8$ לפי
$$\begin{aligned}
&0 \mapsto \mathrm{id} \\
&1 \mapsto (01234567) \\
&2 \mapsto (0246)(1357) \\
&3 \mapsto (03625147) \\
&4 \mapsto (04)(15)(26)(37)
\end{aligned}$$

אם היו d צבעים במקום 3 צבעים? מחשבים

$$k = \frac{1}{|\mathbb{Z}_8|} \sum_{g \in \mathbb{Z}_8} d^{[\mathbb{Z}_8 : \langle g \rangle]} = \frac{1}{8} \left(d^8 + 4 \cdot d^1 + 2 \cdot d^2 + d^4 \right)$$

אם $d = 1$ נקבל שיש סידור אחד, אם $d = 2$ אז יש 36 סידורים, ואם $d = 3$ נקבל שיש 834 סידורי נרות עד כדי סיבובים.

0.2 יצוג עם יוצרים ויחסים

תזכורת 0.6. תהי G חבורה ותהי $S \subseteq G$ תת־קבוצה. אז

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H = \bigcup_{k \geq 0} \left\{ s_1^{i_1} \dots s_k^{i_k} \,\middle|\, s_1, \dots, s_k \in S,\ i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

היא תת־החבורה של G הנוצרת על ידי S.

באופן לא פורמלי יש דרך להגדיר חבורות על ידי יצוג עם יוצרים ויחסים

$$G = \langle S \mid R \rangle$$

כאשר S היא קבוצת היוצרים ו-R היא קבוצת היחסים (מילים סופיות ב-$(S \cup S^{-1})^*$)

דוגמה 0.7. יצוג של חבורה ציקלית מסדר n הוא

$$\mathbb{Z}_n \cong \langle x \mid x^n \rangle$$

הרי המילים האפשרויות באות אחת הן

$$\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0 = e, x, x^2, x^3, x^4, \dots$$

וחבורה ציקלית אינסופית תהיה עם יצוג על ידי יוצרים ויחסים

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\cong \langle x \mid \varnothing \rangle \\ 1 &\mapsto x \end{aligned}$$

דוגמה 0.8. יש הבדל בין החבורות הבאות

$$F_2 \cong \langle x, y \mid \varnothing \rangle \qquad \begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\cong \left\langle x, y \,\middle|\, xyx^{-1}y^{-1} \right\rangle \\ (1,0) &\mapsto x \\ (0,1) &\mapsto y \end{aligned}$$

הערה 0.9. נחשוב על איברי קבוצה לא ריקה X בתור אותיות ונוסיף אותיות חדשות $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. נתבונן על אוסף כל המילים הסופיות $(X \cup X^{-1})^*$ באותיות האלו.

הגדרה. מילה ב-$(X\cup X^{-1})^*$ $w\in$ נקראת מצומצמת אם היא לא מכילה אף תת־מילה מן הצורה aa^{-1} או $a^{-1}a$ עבור $a\in X$.
למשל אם $X=\{a,b,c\}$, אז המילה $cba^{-1}b$ היא מצומצמת. המילה $babb^{-1}ac^{-1}a^{-1}a$ היא לא מצומצמת. המילה הריקה מצומצמת.

הגדרה (ראשונה לחבורה החופשית)**.** החבורה החופשית F_X על הקבוצה X מכילה כאיברים את כל המילים המצומצמות על $(X\cup X^{-1})^*$ עם הפעולה $\bullet$ של שרשור המילים ואז מחיקת כל המופעים של aa^{-1} או $a^{-1}a$ באופן רקורסיבי. איבר היחידה הוא המילה הריקה.

דוגמה 0.10. נכפיל שתי מילים ב-$F_{\{a,b\}}$:

$$\begin{aligned} ab^{-1}abba^{-1}\bullet ab^{-1}aab &= ab^{-1}abba^{-1}ab^{-1}aab \\ &= ab^{-1}abbb^{-1}aab \\ &= ab^{-1}abaab \end{aligned}$$

והמילה המתקבלת היא $ab^{-1}abaab$ שהיא מצומצמת.

הערה 0.11. זו נקודה עדינה שהפעולה $\bullet$ היא קיבוצית

$$(u\bullet v)\bullet w=u\bullet(v\bullet w)$$

הגדרה (שנייה לחבורה החופשית)**.** החבורה החופשית F_X על הקבוצה X היא אוסף מחלקות השקילות $(X\cup X^{-1})^*/\sim$ לפיו $w_1\sim w_2$ אם ורק אם ניתן להגיע מ-w_1 ל-w_2 על ידי מספר סופי של הוספה או מחיקה של תת־מילים מן הצורה aa^{-1} או $a^{-1}a$.
(לוודא שזה אכן יחס שקילות על מילים סופיות)
הפעולה בחבורה F_X היא מחלקת השקילות של שרשור המילים (בלי שום צימצומים):

$$[w_1]\cdot[w_2]=[w_1w_2]$$

הערה 0.12. ברור שהפעולה הזו קיבוצית.

$$([w_1][w_2])[w_3]=[w_1w_2w_3]=[w_1]([w_2][w_3])$$

טענה 0.13. אם F_X היא החבורה החופשית על X לפי ההגדרה הראשונה ו-$F_{X,\sim}$ היא החבורה החופשית על X לפי ההגדרה השנייה, אז

$$\begin{aligned} \varphi\colon F_X &\to F_{X,\sim} \\ w &\mapsto [w] \end{aligned}$$

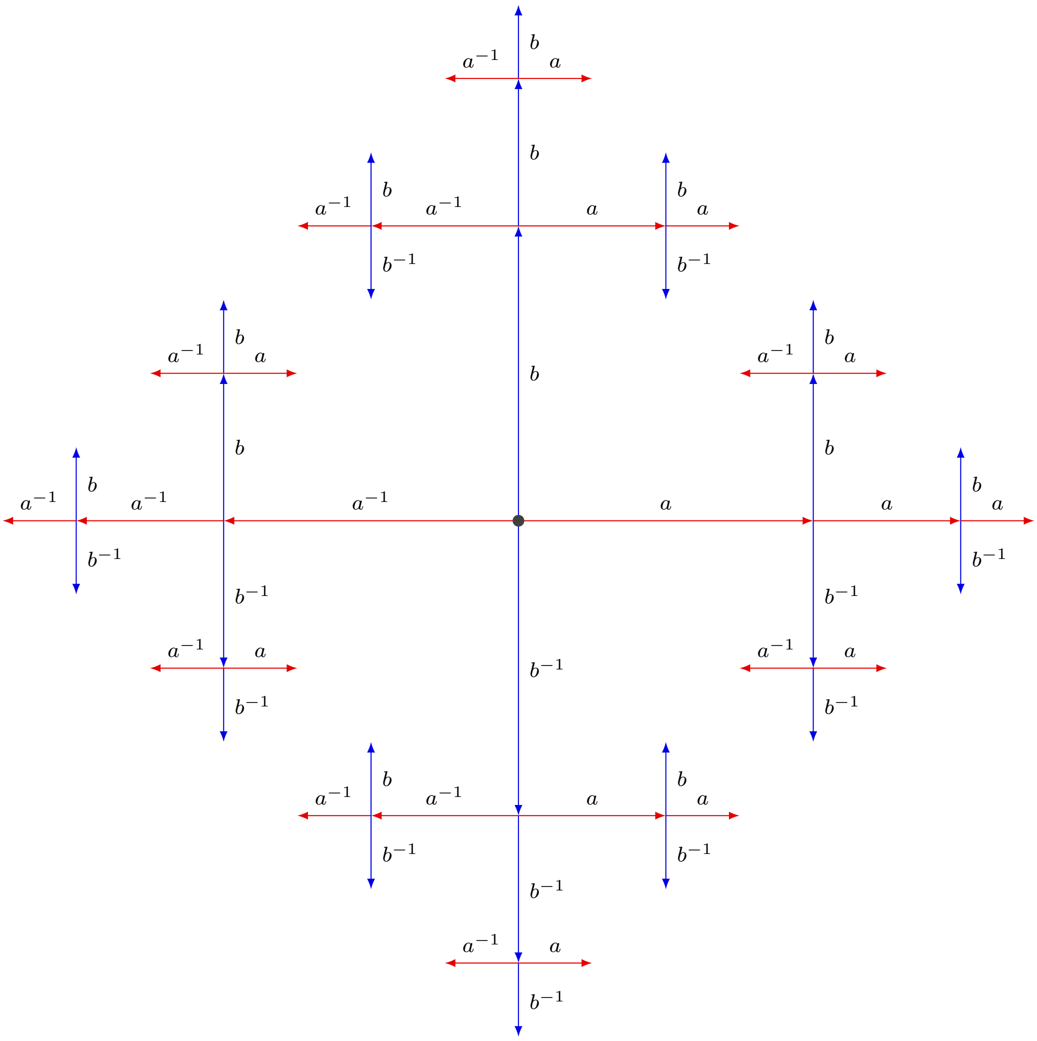
היא איזומורפיזם.

הוכחה. קל לוודא ש-φ הומומורפיזם. האתגר הוא להראות כי φ היא חח"ע ועל. כלומר להראות שלכל מילה ב-$(X\cup X^{-1})^*$ קיים $w\in$ נציג יחיד $w\sim u$ שהוא מילה מצומצמת. □

דוגמה 0.14. אם X, Y הן קבוצות מאותה עוצמה, אז $F_Y \cong F_X$. למשל

$$F_{\{x\}} \cong F_1 \cong \mathbb{Z}$$

החבורה החופשית על $\{a_1, \ldots, a_d\}$ לרוב מסומנת F_d. אם $d > 1$ אז החבורה לא אבלית. הנה חלק מגרף קיילי של $F_2 \cong F_{\{a,b\}}$ הוא עץ 4-רגולרי אינסופי:



טענה 0.15 (האוניברסליות של החבורה החופשית). נניח כי חבורה G נוצרת על ידי $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ כלשהי, אולי עם יחסים בינהם. אז קיים אפימורפיזם

$$\pi \colon F_{|S|} \to G$$
$$a_i \mapsto s_i$$

באופן יותר כללי, לכל **פונקציה** $f \colon X \to G$ קיים הומומורפיזם $\hat{f} \colon F_X \to G$ כך שהתרשים הבא מתחלף:

$$\begin{tikzcd} F_X \arrow[dr, dotted, "\hat{f}"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

כלומר יש התאמה חח"ע ועל בין $\operatorname{Hom}(F_X, G)$ לבין אוסף הפונקציות מ-X ל-G.

$$\hat{f}(x_1 x_5^3 x_2^{-1}) = f(x_1) f(x_5)^3 f(x_2)^{-1}$$

בפרט, כל חבורה היא תמונה אפימורפית של חבורה חופשית (אולי מדרגה אינסופית):

$$F_G \twoheadrightarrow G \hookrightarrow S_G$$

עכשיו נוכל לתאר את קבוצת היחסים, אך קודם הגדרה:

הגדרה 0.16. תהי G חבורה ותהי $R \subseteq G$ תת־קבוצה. אז תת־החבורה הנורמלית של G הנוצרת על ידי R היא תת־החבורה הנורמלית הקטנה ביותר של G המכילה את R. נסמנה $\langle\langle R \rangle\rangle$.

הערה 0.17. קודם כל $\langle\langle R \rangle\rangle$ קיימת. כמו שיש ל-$\langle R \rangle$ שתי בניות, גם לה יש:

$$\begin{aligned} \langle\langle R \rangle\rangle &= \bigcap_{\substack{H \lhd G \\ R \subseteq H}} H \\ &= \bigcup_{k \geq 0} \left\{ a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k} \,\middle|\, \forall j \in [k], \exists r_j \in R : a_j \in \operatorname{conj}(r_j), i_j \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

או במילים: זו תת־חבורה הנוצרת על ידי כל האיברים שצמודים לאיברים של R. בפרט

$$\{e\} \leq \langle R \rangle \leq \langle\langle R \rangle\rangle \lhd G$$

דוגמה 0.18. נתבונן בחבורה $G = GL_2(\mathbb{R})$. נסמן ב-$\mathcal{U}$ את כל המטריצות ב-G שהן משולשיות עליונות וב-$\mathcal{L}$ את כל המטריצות ב-G שהן משולשיות תחתונות. לפי אלגברה לינארית לכל מטריצה $A \in GL_n(\mathbb{R})$ קיים פירוק

$$A = LU$$

כאשר $L \in \mathcal{L}$ ו-$U \in \mathcal{U}$. לכן

$$GL_2(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{U}, \mathcal{L} \rangle$$

מפני שכל מטריצה צמודה לשיחלוף שלה (כלומר $A = PA^TP^{-1}$ עבור $P \in G$ כלשהי), נקבל

$$GL_2(\mathbb{R}) = \langle\langle \mathcal{U} \rangle\rangle$$

הגדרה 0.19. הייצוג $G = \langle S \mid R \rangle$ הוא

$$G = F_S / \langle\langle R \rangle\rangle$$

אם קיימות S ו-R סופיות כך ש-$G = \langle S \mid R \rangle$ נאמר כי G מוצגת סופית.

$$\begin{aligned} F_S &\to F_S / \langle\langle R \rangle\rangle \\ s_i &\mapsto s_i \langle\langle R \rangle\rangle \end{aligned}$$

דוגמה 0.20. כל חבורה סופית היא מוצגת סופית. עושים זאת בעזרת קידוד טבלת הכפל ליחסים.

דוגמה 0.21. לפעמים אינטואיציה עובדת כמו שרוצים

$$\langle a, b \mid b \rangle \cong \langle a \mid \varnothing \rangle \cong \mathbb{Z}$$

נבנה במפורש הומומורפיזם

$$\varphi \colon F_{\{a,b\}} \to \mathbb{Z}$$

לפי $\varphi(a) = 1$ ו-$\varphi(b) = 0$. צריך לוודא כי $\ker \varphi = \langle\langle b \rangle\rangle$ ושהתמונה היא $\mathbb{Z}$. מסיימים על משפט האיזומורפיזם הראשון.

רק כדי להיות בטוחים, נוכיח $\ker \varphi = \langle\langle b \rangle\rangle$. אם $w \in \langle\langle b \rangle\rangle$, אז כל לראות כי

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \varphi(u_1 b u_1^{-1} u_2 b u_2^{-1} \dots u_k b u_k^{-1}) \\ &= \varphi(u_1)\varphi(b)\varphi(u_1^{-1})\varphi(u_2)\varphi(b)\varphi(u_2^{-1}) \dots \varphi(u_k)\varphi(b)\varphi(u_k^{-1}) \\ &= \varphi(u_1) + 0 - \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + 0 - \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_k) + 0 - \varphi(u_k) = 0 \end{aligned}$$

לכן $w \in \ker \varphi$. בכיוון השני, אם $w \in \ker \varphi$, אז אפשר לכתוב אותה בתור

$$w = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_m} b^{j_m}$$

כאשר $i_k, j_k \in \mathbb{Z}$ כלשהם. מפני שהיא בגרעין $\varphi(w) = i_1 + \dots + i_m = 0$. נוכל לארגן את החזקות של w באופן הבא:

$$\begin{aligned} w &= a^{i_1} b^{j_1} a^{-i_1} a^{i_1+i_2} b^{j_2} \dots a^{i_m} b^{j_m} \\ &= a^{i_1} b^{j_1} a^{-i_1+(i_1+i_2)} b^{j_2} a^{-(i_1+i_2)+(i_1+i_2+i_3)} \dots \\ &\quad \dots a^{-(i_1+i_2+\dots+i_{m-1})+(i_1+i_2+\dots+i_m)} b^{j_m} a^{-(i_1+i_2+\dots+i_m)} \end{aligned}$$

וקיבלנו כי w היא מכפלה של איברים מן הצורה $a^{i_1+\dots+i_k} b a^{-(i_1+\dots+i_k)}$ שהם צמודים ל-b. לכן $w \in \langle\langle b \rangle\rangle$.

דוגמה 0.22. לבית הראו כי

$$\left\langle a,b \,\middle|\, aba^{-1}b^{-1}\right\rangle \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

באותה דרך

$$\begin{aligned}\varphi\colon F_2 &\to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\ a &\mapsto (1,0)\\ b &\mapsto (0,1)\end{aligned}$$

שזה אפימורפיזם שגרעינו $\langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle$.

דוגמה 0.23. יהי $n\geq 3$. נגדיר את תת־החבורה $D_n=\langle\sigma,\tau\rangle$ של $GL_2(\mathbb{R})$ כאשר

$$\sigma=\begin{pmatrix}\cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n})\\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n})\end{pmatrix}\qquad\qquad \tau=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

כנראה כבר ראיתם בתרגול כי $|D_n|=2n$, למשל כי היא פועלת על צלעות מצולע משוכלל עם n קודקודים באופן טרנזיטיבי, ובמייצב יש שני איברים.

טענה 0.24. יצוג סופי של D_n הוא

$$D_n\cong\left\langle x,y \,\middle|\, x^n,y^2,(yx)^2\right\rangle$$

הוכחה. נבנה הומומורפיזם

$$\begin{aligned}\varphi\colon F_2 &\to D_n\\ x &\mapsto \sigma\\ y &\mapsto \tau\end{aligned}$$

וכדי לראות את האיזומורפיזם המתקבל ממשפט האיזומורפיזם הראשון, מספיק להוכיח כי

$$\ker\varphi = N := \left\langle\!\left\langle x^n,y^2,(yx)^2\right\rangle\!\right\rangle$$

תחילה נראה כי $N\subseteq\ker\varphi$. נחשב

$$\begin{aligned}\varphi(x^n)&=\sigma^n=I\\ \varphi(y^2)&=\tau^2=I\\ \varphi((yx)^2)&=(\tau\sigma)^2=I\end{aligned}$$

ולכן φ משרה אפימורפיזם

$$\hat{\varphi}\colon\ \left\langle x,y \,\middle|\, x^n,y^2,(yx)^2\right\rangle\to D_n$$

כדי להשתכנע שהוא אכן על, נשים לב כי $\sigma, \tau \in \operatorname{im}\hat{\varphi}$. בנוסף, מפני ש-$D_n$ נוצרת על ידי $\{\sigma, \tau\}$, אז $\hat{\varphi}$ היא על. לאיברים ב-$\langle x, y \,|\, x^n, y^2, (yx)^2 \rangle$ אפשר למצוא הצגה "קנונית" בתור $x^i y^j$ כאשר $0 \leq i < n$ ו-$0 \leq j < 2$.

$$(yx)^2 = yxyx = e$$
$$yx = x^{-1}y^{-1} = x^{n-1}y$$

כלומר יש לכל היותר $2n$ איברים, וראינו שב-D_n יש לפחות $2n$ איברים, אזי נקבל ש-$\hat{\varphi}$ הוא איזומורפיזם. $\square$

הערה 0.25. קשה להבין חבורות מהיצוג שלהן, גם אם הוא סופי.