# פתרון תרגיל בית 3 בשדות ותורת גלואה
# 88-311 סמסטר א' תשע"ט

**שאלה 1** (חימום)**.** תהי $K/F$ הרחבת שדות ממימד ראשוני. יהי $F \subseteq L \subseteq K$ שדה ביניים. הוכיחו $L = F$ או $L = K$.

פתרון. לפי כפליות הממד

$$[K : F] = [K : L] [L : F]$$

כאשר $[K : F]$ ראשוני. לכן $[L : F] = 1$ או $[K : L] = 1$. כלומר $L = F$ או $L = K$.

**שאלה 2.** תהי $K/F$ הרחבת שדות. הוכיחו (למשל באינדוקציה) שלכל $a_1, \ldots, a_n \in K$ מתקיים

$$[F [a_1, \ldots, a_n] : F] \leq \prod_{i=1}^{n} [F [a_i] : F]$$

פתרון. ראינו שאם $F \subseteq L \subseteq K$ ו-$a \in K$, אז $[L[a] : L] \leq [F[a] : F]$. הרי הפולינום המינימלי של $a$ מעל $L$ מחלק (מעל $L$) את הפולינום המינימלי של $a$ מעל $F$. בפרט, אם $L = F[a_1]$ ונספח את $a_2$ אז

$$[F[a_1, a_2] : F[a_1]] \leq [F[a_2] : F]$$

מכפליות הממד נקבל

$$[F[a_1, a_2] : F] = [F[a_1, a_2] : F[a_1]] [F[a_1] : F] \leq [F[a_1] : F] [F[a_2] : F]$$

כעת אפשר לעשות אינדוקציה:

$$[F [a_1, \ldots, a_n] : F] = [F [a_1, \ldots, a_n] : F [a_1, \ldots, a_{n-1}]] [F [a_1, \ldots, a_{n-1}] : F]$$
$$\leq [F [a_n] : F] \prod_{i=1}^{n-1} [F [a_i] : F] = \prod_{i=1}^{n} [F [a_i] : F]$$

**שאלה 3.** מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדה המצויין:

א. $\sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.

ג. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ מעל $\mathbb{Q}$.

ד. $i + \sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון.

א. קל לראות ש-$\sqrt[3]{5}$ מאפס את הפולינום $x^3 - 5$, שהוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$ לפי קריטריון אייזנשטיין עבור 5.

ב. $x^2-2$ מתאפס ב-$\sqrt{2}$. הפולינום המינימלי לא יכול להיות לינארי כי $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}[i]$ (כי אם $\sqrt{2}=a+bi$ אז $bi=\sqrt{2}-a$ הוא ממשי מה שמכריח $b=0$. אבל אז $\mathbb{Q}\ni a=\sqrt{2}$ שזו סתירה). לכן $x^2-2$ הוא הפולינום המינימלי.

ג. נסמן $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ונחשב

$$\alpha^2=2+\sqrt{2}$$
$$\left(\alpha^2-2\right)^2=2$$
$$\alpha^4-4\alpha^2+2=0$$

ולכן $\alpha$ מאפס את $x^4-4x^2+2$ שהוא אי פריק לפי אייזנשטיין ולכן זהו הפולינום המינימלי.

ד. נסמן $\alpha=i+\sqrt{2}$ ונחשב

$$\alpha^2=1+2\sqrt{2}i$$
$$\frac{(\alpha^2-1)^2}{4}=-2$$
$$\alpha^4-2\alpha^2+9=0$$

לכן $x^4-2x^2+9$ הוא פולינום מעל $\mathbb{Q}$ שמתאפס ב-$\alpha$. ניתן להראות ש-$\mathbb{Q}\left[i+\sqrt{2}\right]=\mathbb{Q}\left[i,\sqrt{2}\right]$ ולחשב כי $\left[\mathbb{Q}[i,\sqrt{2}]:\mathbb{Q}\right]=4$. מפני שהפולינום המינימלי צריך להיות מדרגה 4, אז בהכרח הפולינום שמצאנו הוא הפולינום המינימלי.

**שאלה 4.** תהי $K/F$ הרחבת שדות, ויהי $\alpha\in K$ עם פולינום מינימלי

$$m_\alpha(x)=x^n-c\in F[x]$$

עבור $m\in\mathbb{N}$ מצאו את $m_{\alpha^m}(x)$, הפולינום המינימלי של $\alpha^m$. הדרכה:

א. הניחו $m|n$ ומצאו פולינום שמתאפס ב-$\alpha^m$.

ב. למקרה הכללי סמנו $d=(n,m)$ ומצאו קודם את $m_{\alpha^d}(x)$.

פתרון.

א. לפי הנתון קיים $k$ כך ש-$n=mk$. אנחנו יודעים כי

$$0=\alpha^n-c=(\alpha^m)^k-c$$

ולכן $x^k-c$ הוא פולינום שמתאפס ב-$\alpha^m$. נניח כי

$$m_{\alpha^k}(x)=x^t+\sum_{i=0}^{t-1}a_ix^i$$

הוא הפולינום המינימלי של $\alpha^m$, ולמעשה הראנו $t\le k$. לפי הגדרה $\alpha^{mt}+\sum_{i=0}^{t-1}a_i\alpha^{mi}=0$ וקיבלנו ש-$\alpha$ הוא שורש של פולינום מדרגה $mt$. אז בהכרח $n\le mt$. לכן $\frac{n}{m}=k\le t$, ונקבל $m_{\alpha^m}(x)=x^k-c$.

ב. קיימים $s,t\in\mathbb{Z}$ כך ש-$d=sn+tm$. לפי הגדרה $d|m$ ולכן $F(\alpha^m)\subseteq F(\alpha^d)$. נרצה להראות הכלה בכיוון השני, ואז להשתמש בסעיף הקודם. נשים לב כי

$$\alpha^d=\alpha^{sn+tm}=(\alpha^n)^s(\alpha^m)^t=c^s(\alpha^m)^t\in F(\alpha^m)$$

ולכן $F(\alpha^m) = F(\alpha^d)$. בעזרת הסעיף הקודם נסיק

$$[F(\alpha^m) : F] = [F(\alpha^d) : F] = \frac{n}{d}$$

וכי $m_{\alpha^d}(x) = x^{n/d} - c$. מפני ש-$(\alpha^m)^{n/d} = (\alpha^n)^{m/d} = c^{m/d}$, נקבל כי $m_{\alpha^m}(x) = x^{n/d} - c^{m/d}$ הוא פולינום שמתאפס ב-$\alpha^m$ עם דרגה השווה לממד ההרחבה, ולכן הוא הפולינום המינימלי.

בהצלחה!