תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

21 בינואר 2016

1. יהא R חוג. הוכח את הבאים:

(א) לכל $a \in R$ מתקיים $-(-a) = a$

(ב) לכל $a, b \in R$ מתקיים $-(a+b) = -a - b$

(ג) לכל $a, b \in R$ מתקיים $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

(ד) לכל $a, b \in R$ מתקיים $(-a)(-b) = ab$

(ה) לכל $a \in R$ מתקיים $(-a)^2 = a^2$

2. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \ (a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$$

$$\forall (a,b), (x,y) \in R_1 \times R_2 : \ (a,b)(x,y) = (ax, by)$$

כאשר $a + x$ זהו חיבור של R_1, $b + y$ זהו חיבור של R_2. באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1, R_2 לפי ההקשר. עובדה: זה אכן חוג. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם R_1, R_2 חוגים עם חילוק אז גם $R_1 \times R_2$

(ב) אם R_1, R_2 חוגים עם יחידה אז גם $R_1 \times R_2$

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\left\{a + b\sqrt{2} \,|a, b \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

(ג) הקבוצה $R=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 0 \end{array}\right)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

(ד) קבוצת הפונקציות מהממשיים לממשיים $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f \text{ is function}\}$ עם חיבור פונקציות $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ וכפל מטריצות המוגדר כמכפלה $(fg)(x)=f(x)g(x)$

(ה) הקבוצה $\mathbb{C}^{2\times 2}\supseteq\left\{\left(\begin{array}{cc} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{array}\right):\ z,w\in\mathbb{C}\right\}=\mathbb{H}$ עם חיבור וכפל מטריצות.