

הרצאות בקורס טופולוגיה 8822205 משנת 2020

המרצה: פרופסור מיכאל מגרל

אתר המרצה: <http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html>

אתר הקורס: math wiki טופולוגיה 8822205

הרצאה 1

מרחבים מטריים

קישור מומלץ: https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

הגדרה (Frechet 1906): מטריקה (או מרחק) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה –

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty) \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

אקסיומות:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (m_3) \text{ (אי שוויון המשולש).}$$

אם מתקיימים התנאים אז אומרים ש- (X, d) מ"מ (metric space).

טענה 1: יכולנו להגדיר פסאודו-מטריקה d על X כפונקציה $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. ואז להוכיח (בעזרת האקסיומות) שהיא לא שלילית. ז"א תמיד מתקיים:

$$\forall x, y \in X: d(x, y) \geq 0$$

$$(d: X \times X \rightarrow [0, \infty)) \text{ ז"א}$$

הוכחה:

$$2 \cdot d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \stackrel{m_2}{=} d(x, y) + d(y, x) \stackrel{m_3}{\geq} d(x, x) \stackrel{m_1}{=} 0$$

לכן –

$$2 \cdot d(x, y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x, y) \geq 0}$$

■

דוגמאות:

• (\mathbb{R}, d) שמוגדרת לפי – $d(x, y) = |x - y|$

$$X = \mathbb{R}^n \quad \bullet$$

א. מטריקה אוקלידית (\mathbb{R}^n, d) שמוגדרת לפי –

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

ב. מטריקת הסכום

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$d(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\} \quad \text{ג. מטריקת המקסימום}$$

$$d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max} \quad \text{הערה:}$$

• בקבוצה $C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous functions}\}$

א. המוגדרת לפי –

$$d_{\max}(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע

(ממשפט ויירשטראס מתקבל מקסימום בקטע $[a, b]$).

$$d_1(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx \quad \text{ב.}$$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a, b]$

הגדרה: (X, d) נקרא מרחב פסאודו-מטרי (*pseudometric*, נקרא *semimetric* לפעמים) אם:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1^p)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (m_3)$$

הגדרה: (X, d) נקרא מרחב אולטרה-מטרי (*ultrametric*) אם:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z) \quad (m_3^u \text{ חיזוק של } m_3).$$

הערה:

$$\{\text{pseudometric}\} \supset \{\text{metric}\} \supset \{\text{ultrametric}\}$$

דוגמה: לכל קבוצה X נגדיר –

$$\forall x, y \in X: d_0(x, y) = 0$$

פסאודו מטריקת האפס.

זאת פסאודו מטריקה תמיד, אבל זו מטריקה $\Leftrightarrow |X| = 1$ (ז"א אם X נקודון).

• **דוגמה:**

$$\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1| \quad \text{א. ב- } X = \mathbb{R}^2, \text{ נגדיר –}$$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל –

$$\rho_1((3,5), (3,18)) = 0$$

(הערה – אם נגדיר יחס שקילות ש- x ו- y שקולים אם $\rho_1(x, y) = 0$ אז ניתן להסתכל על מחלקות השקילות ובעצם יצרנו את \mathbb{R}).

• **דוגמה:** לכל מטריקה d גם $c \cdot d \quad \forall c > 0$ מטריקה

טענה 2: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

• **דוגמה:** נגדיר על קבוצה X מטריקה "1-0":

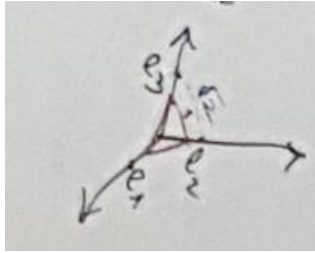
$$d_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

d_Δ אולטרה-מטריקה (לבדוק!).

למשל:

$$X = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

עם מטריקה שמושרית מ- d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ .



$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\|e_i - e_j\|}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

נשים לב כי כאשר $i \neq j$

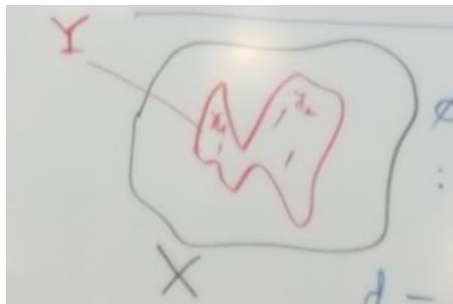
$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2}$$

• אולטרה-טריקה p -אדית על \mathbb{Z}

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \frac{1}{p^k}, & k = \max\{i \in \{0, 1, 2, \dots\} \mid \frac{x-y}{p^i} \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

$$d_3(0, 5) = 1, d_3(0, 27) = \frac{1}{3^3}$$

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X, d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדר:

$$d = d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא תת מרחב מטרי של (X, d) .

למשל:

$$Y = \underbrace{\left\{ \frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \leq i \leq n \right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X}$$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל- d_Δ .

הגדרה: נתון מ"מ (X, d) , $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A, B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

רמז: אין אישוויון המשולש (תנו דוגמה)

הערה:

לא תמיד \inf ניתן להחליף ב- \min . למשל –

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$\min \neq \inf = d(A, B) = 0$$

תרגיל (חשוב!): (ראו שיעורי בית 1)

תמיד מתקיים –

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X, \emptyset \neq A \subset \underbrace{(X, d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) \quad \text{רמז:}$$

קודם להוכיח מקרה פרטי $A = \{a\}$ דרך $m_3 +$ הגדרת \inf .

הגדרה (הקוטר):

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$$

$$0 \leq \text{diam}(A) \leq \infty$$

$\text{diam}(A) < \infty$ נקראת **חסומה** אם A .

הערה: לא תמיד $\sup = \max$.

$$A = (0, 1)$$

$$\max \dots \neq \sup \dots = \text{diam} = 1$$

הגדרות: יהי (X, d) , $a \in X$, $r > 0$.

(1) כדור פתוח עם מרכז ב- a ורדיוס r :

$$a \in B(a, r) = B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

(2) כדור סגור עם מרכז ב- a ורדיוס r :

$$a \in B[a, r] = B_r[a] := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

(3) ספירה *sphere*

$$a \notin S(a, r) = S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$$

הערה:

$$a \in B(a, r) \subseteq B[a, r]$$

$$\underbrace{S(a, r)}_{a \notin} \subsetneq \underbrace{B[a, r]}_{a \in}$$

תרגיל: לתאר $B(a, r), B[a, r], S[a, r]$ במרחב (X, d_Δ) .

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ששם ייתכן:

$$S(a, r) = \emptyset$$

$$B(a, r) = B[a, r]$$

עבור a, r מסוימים.

אזהרה: זה לא ייתכן ב- \mathbb{R}^n או במרחבים נורמיים.

תרגיל: לתאר $B(a, r), B[a, r], S[a, r]$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

תכונות: (לבדוק!)

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a) \quad (\text{א})$$

$$\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r \quad (\text{ב}) \quad (\text{לא תמיד שווה}).$$

$$A \subseteq X \text{ חסומה} \Leftrightarrow \exists z \in X, \exists r > 0: A \subseteq B_r(z) \quad (\text{ג})$$

(ד) (כדור בתת מרחב)

$$B_{d_r}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap Y$$

(ה) מצאו מ"מ (X, d) וכדורים שונים כך ש

$$\begin{cases} B_{r_1}(a) \neq B_{r_2}(b) \\ B_{r_1}(a) \subset B_{r_2}(b) \\ r_1 > r_2 \end{cases}$$

רמז: שוב תת – מרחב, למחוק ...

$$d \leq \rho \Rightarrow B_\rho(a, r) \subseteq B_d(a, r) \quad (1)$$

הגדרה: (מרחב נורמי) נניח E מרחב ווקטורי על שדה \mathbb{R} . פונקציה

$$\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty)$$

נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_E \quad (n_1)$$

$$c \in \mathbb{R}, v \in E \quad \text{לכל} \quad \|cv\| = |c| \cdot \|v\| \quad (n_2)$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (n_3)$$

אז $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ הפונקציה

$$d_{\|\cdot\|}: E \times E \rightarrow [0, \infty) \quad d_{\|\cdot\|}(u, v) := \|u - v\|$$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$.

הערה: "ההתאמה" $(E, \|\cdot\|) \mapsto (E, d_{\|\cdot\|}) \in \{normed spaces\} \rightarrow \{metric spaces\}$

היא:

א. לא על

(למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת" בתמונה" של ההתאמה הנ"ל)

ב. חד חד ערכית

(נובע מהשוויון $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$ -- מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה).

דוגמאות של מרחב נורמי:

• במרחב ווקטורי \mathbb{R}^n נגדיר

א. נורמה אוקלידית $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|x\|_{\max} = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|x\|_{\max} \leq \|x\| \leq n \|x\|_{\max}$

נגדיר: $C[a,b] := \{f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous functions}\}$ •

א. $\|f\|_{\max} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

ב. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ (משרה מטריקת השטחים d_1)

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(C[a,b], d_{\max})$ עם מרכז בפונקצית האפס.
תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(C[a,b], d_1)$ עם מרכז בפונקצית האפס.

הגדרה: $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש- f איזומטריה אם –

$$\begin{cases} f(X) = Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$$

שומרת מרחקים, כלומר –

$$\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

טענה: כל איזומטריה היא תמיד חז"ע.

הוכחה:

אם $x_1 \neq x_2$ נניח ש –

$$f(x_1) = f(x_2)$$

אז לכן –

$$0 = \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \underset{m_1}{\geq} 0$$

בסתירה!

■

הגדרה: אם בהגדרה הנ"ל דורשים רק את השמירה על מרחקים (לא בהכרח $f(X) = Y$) אז אומרים שהפונקציה היא שיכון איזומטרי.

שימו לב: אם $f : X \rightarrow Y$ שיכון איזומטרי אז $f : X \rightarrow f(X)$ איזומטריה.

הערה:

איזומטריה ב- $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריה.

למשל:

$$[8,10] \neq [1,2] \simeq [5,6]$$

קיים שיכון איזומטרי לינארי $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ לכל $m \leq n$

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

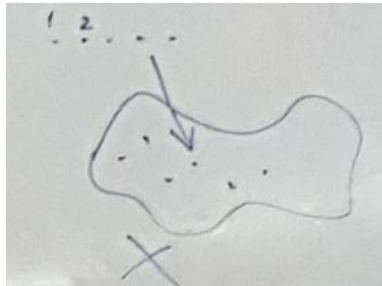
סדרות

הגדרה (תזכורת): סדרה בקבוצה X היא פונקציה –

$$\{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \xrightarrow{f} X$$

$$n \mapsto f(n) = x_n$$

(מסמנים גם a_n או b_n).



הגדרה: אומרים שסדרה x_n מתכנסת ל a במרחב (X, d)

$$\lim x_n = a \quad (\text{או } x_n \xrightarrow{d} a)$$

אם:

$$d(a, x_n) \rightarrow 0 \quad \text{כאשר } n \rightarrow \infty$$

ז"א אם –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$$

ניסוח שקול: כל כדור $B(a, r)$ של a מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon \quad \text{ניסוח שקול:}$$

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת מבודדת (isolated) אם –

$$\exists \varepsilon > 0: B(a, \varepsilon) = \{a\}$$

הגדרה: נניח (X, d) מ"פ. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת פתוחה אם מתקיים:

$$a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \quad B(a, \varepsilon_a) \subseteq A$$

הרצאה 2

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם –

$$\exists \epsilon > 0: B(a, \epsilon) = \{a\}$$

הגדרה: נניח (X, d) מ"פ. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **פתוחה** אם מתקיים:

$$a \in A \Rightarrow \exists \epsilon_a > 0 \quad B(a, \epsilon_a) \subseteq A$$

הערה: נקודה a היא מבודדת אם"ם $\{a\}$ קבוצה פתוחה.

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב \mathbb{R} או ב \mathbb{Q} ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $[0,1] \cup \{3\}$ של \mathbb{R}

ג. ב \mathbb{Z} כל נקודה מבודדת.

הגדרה: מ"פ (X, d) נקרה **דיסקרטי** אם כל נקודה היא מבודדת.

למשל \mathbb{Z} או \mathbb{N} מרחב דיסקרטי ...

כל מרחב X עם מטריקת 1-0 הוא דיסקרטי

הערה: סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול!) בכל מרחב (X, d) .

טענה: a נקודה מבודדת במרחב מטרי (X, d) אם ורק אם

$$\lim x_n = a \text{ גורר שהסדרה } x_n \text{ היא בהכרח קבועה לבסוף } x_1, \dots, x_m, a, a, \dots$$

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(a, \epsilon) = \{a\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ϵ הנ"ל קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(a, \epsilon) = \{a\}$. אז הסדרה היא לבסוף a .

(כיוון שני) נניח כעת ש a לא מבודדת.

נוכיח: שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

ברור $B(a, 1) \neq \{a\}$. נבחר $x_1 \in B(a, 1), x_1 \neq a$. נבחר $0 < \epsilon_2 < \min\{d(a, x_1), 1\}$.

נעיר ש $0 < d(a, x_1)$ כי (X, d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1 .

שוב בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a, \varepsilon_2), x_2 \neq a$.

אז $x_2 \neq x_1$ (כי $x_1 \notin B(a, \varepsilon_2)$). לכן $x_2 \notin \{a, x_1\}$.

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה. אם כבר הגדרנו x_1, \dots, x_n אז נבחר

$$0 < \varepsilon_{n+1} < \min\{d(a, x_1), d(a, x_2), \dots, d(a, x_n), \frac{1}{n}\}$$

קיים $x_{n+1} \in B(a, \varepsilon_{n+1}), x_{n+1} \neq a$ לכן גם $x_{n+1} \notin \{a, x_1, \dots, x_n\}$.

כך נקבל סדרה (עם איברים שונים) ש $\lim x_n = a$ (כי $0 < d(a, x_n) < \frac{1}{n}$).



דוגמה: על שלמים \mathbb{Z} נגדיר מטריקה p-אדית לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}} & , k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, \quad x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

למשל: $x = 24, y = 6, p = 3$

$$d_3(24, 6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

דוגמה של סדרה מתכנסת שהיא לא קבועה לבסוף עם איברים שונים:

$$x_n := 3^n \in \mathbb{Z}$$

$$x_n \xrightarrow{d_3} 0 \quad \text{— ואכן}$$

$$d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0 \quad \text{— כי}$$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב (\mathbb{Z}, d_p)

(שימו לב: במרחב \mathbb{Z} עם מטריקה רגילה כל נקודה היא מבודדת).

דוגמה:

ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש -

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{d_1} \theta & \text{פונקציית האפס} \\ f_n \xrightarrow{d_{max}} \theta & \text{פונקציית האפס} \end{cases}$$

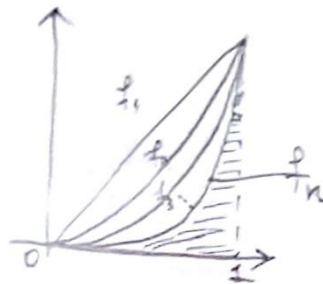
– כאשר (תזכורת)

$$d_1(f_1, f_2) := \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \quad \text{"השטח"}$$

$$d_{max}(f_1, f_2) := \max_{0 \leq x \leq 1} |f_1(x) - f_2(x)|$$

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב- $C[0,1]$)

$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$$



$$\theta = 0(x) = 0$$

$$d_1(f_n, \theta) = \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ז"א –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n, \theta) = 0$$

$$f_n \xrightarrow{d_1} \theta$$

– כעת

$$d_{max}(f_n, \theta) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - 0(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1 \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n, \theta) \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{d_{max}} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $a < b$, $[a, b]$

הגדרות:

(א) נניח d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אומרים ש- d דומיננטי ביחס ל- ρ אם:

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$

(ב) אומרים ש- $d \sim \rho$ ("שקולות") אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

תכונות פשוטות:

$$(1) \quad d \sim c \cdot d, \quad c > 0 \text{ קבוע.}$$

$$(2) \quad d \Leftarrow \rho \leq cd \quad (\text{הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ'}).$$

דוגמה:

d_{max} דומיננטי ביחס ל- d_1 בקבוצה $C[a, b]$.

$$\text{הסבר: } d_1 \leq c \cdot d_{max} \text{ מ"ל}$$

$$\text{מ"ל } \|\cdot\|_1 \leq c \cdot \|\cdot\|_{max}$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{קבוע } c>0} \cdot \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

דוגמה:

$$\boxed{d_{max} \sim d \sim d_1} \quad X := \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{d_{max} \leq d \leq d_1 \leq n \cdot d_{max}} \quad \text{הסבר:}$$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

בהמשך נוכיח – הטופולוגיות שוות!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X, d))

נגדיר טופולוגיה של (X, d) כאוסף של כל תת-קבוצות פתוחות ב- X . נסמן:

$$\mathbf{top}(d) = \mathbf{top}(X, d) := \{X, d\text{-פתוחות}\}$$

כאשר "קבוצה פתוחה" מוגדרת כך:

אומרים ש- $X \supseteq O$ היא פתוחה אם מתקיים:

$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

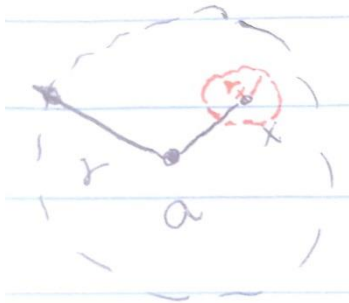
שימו לב: תת קבוצה $A \subseteq X$ לא פתוחה ב- (X, d) אם קיימת נקודה $a \in A$ כך ש

$$B(a, \varepsilon) \text{ לא מוכל ב- } A \text{ לכל } \varepsilon > 0.$$

מכאן ברור למשל $\emptyset \in \mathbf{top}(d)$.

מסקנה: $top(d) \ni O = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$

משפט: $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X, d) : B_r(a) \in top(d)$
 ("ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



הסבר:

$$d(a, x) + r_x < r$$

הרעיון: מכאן ניקח כל מס' r_x כך:

$$0 < r_x < \underbrace{r - d(a, x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$

$$d(a, y) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a, y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.



תוצאה: {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(top(d))$

התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \emptyset \neq O \in top(d)$$

$$(2) O = \bigcap_{i \in I} O_i \text{ איחוד של "כדורים פתוחים"}$$

תרגיל: הוכיחו שלכל מרחב $(X, top(d))$ מתקיים:

$$(t_1) \emptyset, X \in top(d)$$

$$(t_2) O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d) \text{ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם)}$$

$$(t_3) \forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d) \text{ (איחוד של קבוצות פתוחות גם)}$$

הערה: $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*.
על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

משפט (תכונת Hausdorff): נניח (X, d) מרחב מטרי. אז לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \Rightarrow d(a, b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

אם נניח שלא:

$$\exists x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$$

$$\begin{cases} d(a, x) < \epsilon \\ d(b, x) \stackrel{m_2}{=} d(x, b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר את 2 המשוואות:

$$d(a, b) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, b) < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow d(a, b) < 2\epsilon$$

סתירה לבחירה.

☺

משפט (יחידות הגבול): במרחב מטרי גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

הוכחה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{אם נניח בשלילה} -$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

כאשר $a \neq b$

לפי משפט 2 (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות -

$$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב- $B_\epsilon(a)$ וגם ב- $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה \Leftarrow מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם

$$\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$$

ניקח את הסדרה

$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}: (1, y)$$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאודו-מטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

הערה:

ב- (X, d) מ"פ, $a \in X$, סדרה x_n . התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0 \quad (d(x_n, a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$$

$$(2) \quad \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n, a) < \epsilon$$

(3) בכל ϵ -סביבה של a ("ז"א בכל $B(a, \epsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

(4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a , כמעט כל האיברים נמצאים ב- O .

הגדרה: ת"ק A במרחב (X, d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

$$A^c := X/A \in \text{top}(d) \quad \text{ז"א אם}$$

למשל:

$B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק לבד! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות!)

תרגיל: איחוד סופי של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו שכל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X, d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי (Cauchy)** אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב $X - X$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X$ אז סדרת קושי (לבדוק!).

הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא **שלם (Complete)** אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש גבול ב- X .

הגדרה: מ"מ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך (Banach space)** אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

(א) $(\mathbb{R}^n, d), (\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_{max}) \ni Banach$.

(ב) $(C[a, b], d_{max}) \ni Banach$.

(ג) $(C[a, b], d_1) \ni Banach$ (פרטים בתרגול).

(ד) $(C[a, b], d_2) \ni Banach$.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

מכפלה פנימית ב $C[a, b]$ שממנה מקבלים נורמה:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a, b])$.

(ה) נגדיר –

$$l_\infty := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$$

מרחב של סדרות חסומות.

כעת $(l_\infty, \|\cdot\|) \ni Banach$.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f(S) \text{ חסום ב-} \mathbb{R}\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

(1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

(2) $S = \{1, 2, \dots, n\}$, אז נקבל את (\mathbb{R}^n, d_{max}) .

(1) $(l_2, \|\cdot\|)$ Banach.

כאן $l_2 =$ "מרחב הילברט סדרתי":

הכללה הכי טבעית של מרחב אוקלידי (אבל בעל מימד אינסוף).

$$l_2 := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

מרחב ווקטורי עם חיבור וכפל בסקלר רגיל.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{יש מכפלה פנימית}$$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

דוגמאות נוספות לשיכונים איזומטריים

(1) $\mathbb{R}^n \hookrightarrow l_2$ לפי:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

זהו שיכון איזומטרי לינארי (לבדוק!).

(2) $(\mathbb{N}, d_\Delta) \hookrightarrow l_2$ לפי: $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$

הערה:

2 תכונות מאוד חשובות של שלמות:

(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב- X .

רמז: תת קבוצה היא סגורה \Leftrightarrow היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

דוגמה:

$$X = (\mathbb{Z}, d_p) \text{ מ"מ לא שלם!}$$

$$x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \quad \text{לדוגמה עבור } p = 3$$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב- X (פרטים בתרגול).

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d) , (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת רציפה בנקודה $a \in X$ אם:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: d(a, x) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(x)) < \epsilon$$

נסמן:



$$f \in C(X, Y)$$

continuous functions

אם $Y = \mathbb{R}$ אז $f \in C(X)$.

f נקראת רציפה, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

הגדרה: אומרים ש- f רציפה במידה שווה (במ"ש) *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב- a . ז"א –

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$$

$$f \in UC(X, Y)$$

הגדרה: אומרים ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ (Lipschitz) לגבי המקדם $0 < c$ אם:

$$\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

נסמן –

$$f \in Lip_c(X, Y)$$

כאשר –

$$Lip(X, Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(X, Y)$$

תמיד:

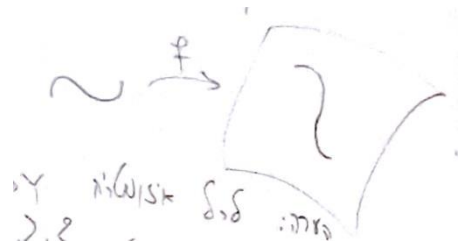
$$Lip(X, Y) \subset UC(X, Y) \subset C(X, Y)$$

דוגמאות פשוטות מאנליזה:

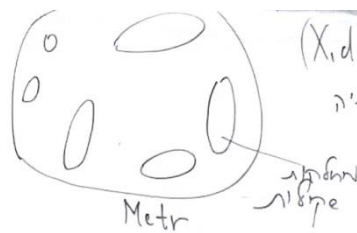
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ רציפה אבל לא במ"ש.

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ.

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך! תנו דוגמה).



הערה: אם קיימת איזומטריה, נסמנה – $(X, d) \simeq (Y, d)$



זהו "יחס שקילות" באוסף Metr (מרחבים מטריים).

$$(X, d) \simeq (X, d) \quad (1) \text{ (פ' הזהות).}$$

$$(X, d) \simeq (Y, \rho) \iff (Y, \rho) \simeq (X, d) \quad (2) \text{ (פ' הופכית).}$$

$$\begin{cases} (X_1, d_1) \simeq (X_2, d_2) \\ (X_2, d_2) \simeq (X_3, d_3) \end{cases} \Rightarrow (X_1, d_1) \simeq (X_3, d_3) \quad (3) \text{ (ההרכבה)}$$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת איזומטריה

$$(\mathbb{Z}, d_5) \neq (\mathbb{Z}, d_3)$$

דוגמאות:

$$Lip_1(X, \mathbb{R}) \ni f_A: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f_A(x) = d(x, A)$$

הסבר: שימוש באי שוויון

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X, \emptyset \neq A \subset \underbrace{(X, d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

$$Lip_1(E, \mathbb{R}) \ni f: E \xrightarrow{\|\cdot\|} [0, \infty) \quad (2)$$

$$x \mapsto \|x\|$$

$$\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\| \quad \text{הסבר: } \sum_{c=1}^n$$

(3) הזזה במ"נ (מרחב נורמי) היא תמיד איזומטריה.

$$T_v: E \rightarrow E$$

$$T_v(x) = v + x$$

$v \in E$ וקטור נתון.

$$\|T_v(z) - T_v(y)\| = \|(v + z) - (v + y)\| = \|z - y\| \quad \text{הסבר:}$$

משפט (עיקרון Heine): נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

(1) רציפה.

$$(2) f \text{ שומרת על התכנסות} \quad \text{כלומר, } (x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a))$$

(3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח. ז"א,

$$\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d)$$

נוכיח בהרצאה הבאה! קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש- d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אז התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

$$(2) d \text{ דומיננטי ביחס ל- } \rho \text{ ז"א } - x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$$

הוכחה: נגדיר את "פונקצית הזהות" –

$$(X, d) \xrightarrow{id} (X, \rho)$$

$$x \mapsto x$$

נשתמש במשפט הקודם (עיקרון היינה).

כש- $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in \text{top}(\rho): O \in \text{top}(d)$$

$$\Rightarrow \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(d) = \text{top}(\rho)$$

$$(2) \rho \sim d$$

הסבר:

נובע מיד! 2 כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

(1) עבור $X = \mathbb{R}^n$:

$$\text{top}(d_{\max}) = \text{top}(d) = \text{top}(d_1)$$

כי: $d_{\max} \sim d \sim d_1$

(2) עבור $X = C[a, b]$ ($a < b$):

$$\text{top}(d_1) \subsetneq \text{top}(d_{\max})$$

(מוכל) כי d_{\max} דומיננטי ביחס ל- d_1 :

$$d_1 \leq (b - a)d_{\max}$$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

(לא שווה) כעת, יש הכלה ממש כי קיימת סדרה f_n ב- $C[a, b]$ ($a < b$) וגם סדרה f ב- $C[a, b]$ כך ש-

$$f_n \xrightarrow{d_1} f, f_n \not\xrightarrow{d_{\max}} f$$

ראינו דוגמה בהרצאה ב- $[0, 1]$.

הרצאה 3

משפט (עיקרון Heine): נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

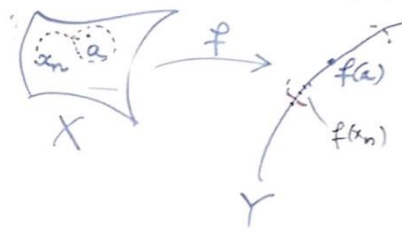
(1) f רציפה.

(2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $(x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a))$).

(3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א, $(\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d))$).

הוכחה (עיקרון היינה):

(1) \Leftrightarrow (2):



נתון ש- $x_n \xrightarrow{d} a$ - צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

$f \Leftarrow$ רציפה בנקודה $a \in X$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$$

(הגדרת Cauchy).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב- ϵ -סביבה: $B_\epsilon(f(a))$

$$f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a) \quad \text{לכן הוכחנו:}$$

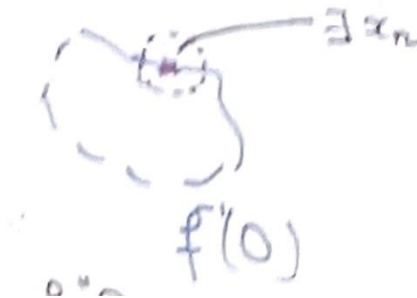
(2) \Leftrightarrow (3):

בניח בשלילה ש- (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \notin \text{top}(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש- $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב- (X, d) .

ז"א קיימת נקודה "לא פנימית" - $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0 B_\epsilon(a) \not\subseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon := \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש-

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח – $f(x_n) \not\xrightarrow{p} f(a)$.

$f(a) \in O$ וכן O פתוחה ולכן $f(a) \in \text{top}(\rho)$ נקודה פנימית ב O .

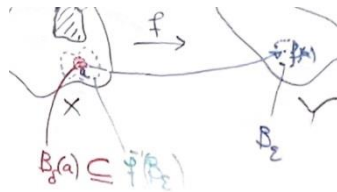
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \not\xrightarrow{p} f(a)$

(1) \Leftrightarrow (3)

בודקים את (1) - רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in \text{top}(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) – $f^{-1}(O) = f^{-1}(B_\epsilon(f(a))) \in \text{top}(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

הוכחנו!



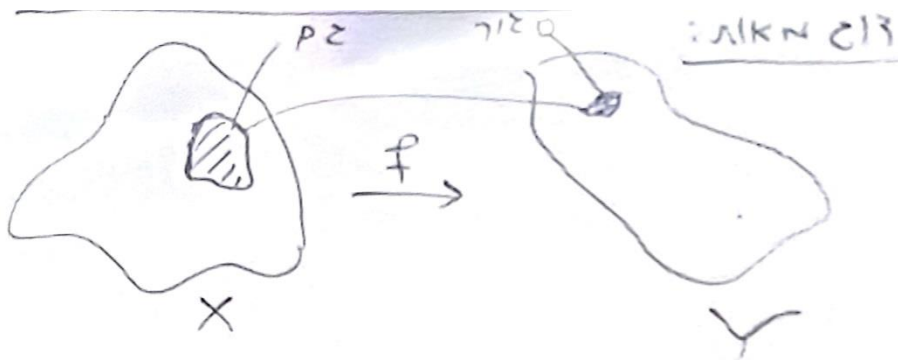
הערה: במשפט Heine שלמדנו (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

(4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

$$\text{הסבר מקוצר: } f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

ובנוסף A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן (3) \Leftrightarrow (4).

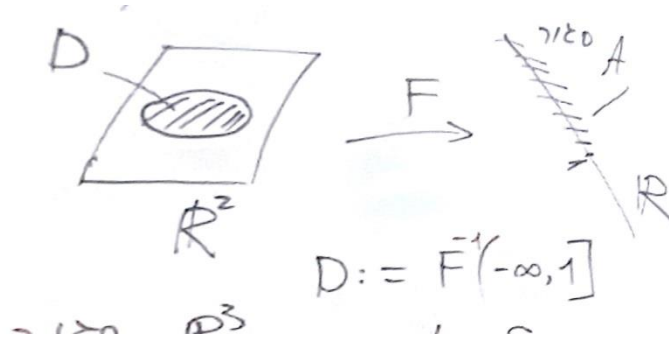


דוגמאות:

1) סגור ב- \mathbb{R}^2 . $D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

הסבר: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



(2) כל מישור ב- \mathbb{R}^3 סגור. למשל -

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0 \right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ- $D = F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב- \mathbb{R} .

(3) בכל מ"מ (X, d) :

$$B_r[a] := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

$$S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$$

סגורות!

הסבר:

נגדיר פונקציה $f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a, x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ - $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$$B_r[a] = f_a^{-1}(-\infty, r] \text{ גם סגור!}$$

$$S_r(a) = f_a^{-1}(\{r\}) \text{ גם סגור!}$$

(4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$$B_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

כאן יש צורך בפונקציית ליפשיץ $f_A(x) = d(x, A)$, $f_A: X \rightarrow \mathbb{R}$.



(5) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, פתוחה במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R}) \stackrel{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$.

(א) "הסגור של A " (Closure of A):

$$A \underset{m_1}{\subseteq} \bar{A} = cl(A) := \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$$

(ב) "סגור סדרתי" (sequential closure):

$$A \underset{\substack{\text{סדרה קבועה} \\ \text{תמיד מתכנסת!}}}{\subseteq} scl(A) := \left\{ x \in X \mid \exists a_n \in A : x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

משפט 1: בכל מ"מ תמיד $scl(A) = cl(A)$.

הוכחה:

(\subseteq) : נניח $z \in scl(A)$ אז –

$$\begin{cases} z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \exists a_n \in A \end{cases}$$

לפי הגדרה –

$$d(z, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = 0$$

המעבר נובע מהגדרת אינפימום.

$$\Rightarrow d(z, A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

(\supseteq) :

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a \in A} d(z, a) = d(z, A) = 0$$

(לפי הגדרת \inf).

נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש –

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underset{=0}{0} \leq d(z, a_n) \leq \underset{\rightarrow 0}{\frac{1}{n}}$$

$$a_n \in A \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z \in scl(A) \quad \text{– מכאן}$$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

(1) A סגורה ב- X (ז"א משלים לפתוחה).

(2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

$$A = cl(A) \quad (3)$$

(4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $\mathbb{R} \xrightarrow{f} X$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

הוכחה:

$$(1) \Leftrightarrow (2):$$

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' -

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן -

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן -

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c פתוחה!

ואז z נקודה פנימית של A^c .

$$\Rightarrow \exists r > 0: B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצא בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל -

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3):$$

בגלל משפט 1.

$$(3) \Leftrightarrow (4):$$

נגדיר -

$$f_A(x) = d(x, A) \quad f_A: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{רציפה!})$$

אז -

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \stackrel{\text{נתון 3}}{=} A$$

$$f_A^{-1}(0) = A \quad \text{ולכן}$$

$$(1) \Leftrightarrow (4):$$

נפעיל "תוספת למשפט Heine" (מקור לסגור גם סגור) $f_A^{-1}(0)$ -- מקור של נקודות.



הגדרה: במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' := \{x \in X \mid x \in cl(A \setminus \{x\})\} \stackrel{metr}{=} \{x \in X \mid x \in scl(A \setminus \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A .

תרגיל: הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A עם איברים שונים שמתכנסת ב X לנקודה z .

רמז: ראו בהרצאה 2 טענה (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$$d(z, A \setminus \{z\}) = 0 \text{ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש } z \text{ לא מבודדת).}$$

תרגיל:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

$$A' = \left\{ (0,0), \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{m} \right) \right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

תכונות (במ"מ): (לבדוק לבד!).

$$cl(A) = A \cup A' \quad (\text{א})$$

$$A' \subseteq A \Leftrightarrow A \text{ סגורה} \quad (\text{ב})$$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

(א) "**קבוצת G_δ** " אם A שווה לחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

$$(\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n) \quad (\text{ז"א})$$

(ב) "**קבוצת F_σ** " אם A שווה לאיחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

$$(\forall n: P_n \text{ סגורה}, \exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n) \quad (\text{ז"א})$$

$$A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma \quad \text{הערה:}$$

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X, d) :

(א) כל קבוצה סגורה היא G_δ .

(ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ .

תרגיל: הוכיחו 2 תכונות חשובות של שלמות:

(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב- X .

רמז: תת קבוצה היא סגורה \Leftrightarrow היא "סגורה בנוגע להתכנסות סדרות".

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: השלמה של מ"מ (X, d) הוא

שיכון איזומטרי $M \xrightarrow{i} (X, d)$, כאשר M מ"מ שלם ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך).

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

(בהמשך נציג 2 הוכחות (מקוצרות)).

הוכחה ראשונה מבוססת על –

משפט (שיכון למרחב Banach): לכל מ"מ (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach \Rightarrow מ"מ שלם).

הוכחה:

למדנו על מרחב $(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}) \ni Banach$.

$$l_\infty(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ חסומה}\}$$

$$\|f\|_{sup} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$ ונגדיר $\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$

$$a \mapsto \varphi(a) = \hat{a} \quad \hat{a}: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)}$$

– ז"א $\hat{a} \in l_\infty(X)$ פונקציה חסומה כי –

$$|\hat{a}(x)| = |d(a, x) - d(z, x)| \leq \underbrace{d(a, z)}_{\text{קבוע}}$$

$$\forall a, b \in X: \boxed{d(a, b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|} \quad \text{מ"ל}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{a} - \hat{b}\| &= \sup_{x \in X} |(d(a, x) - d(z, x)) - (d(b, x) - d(z, x))| = \\ &= \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \leq d(a, b) \end{aligned}$$

– מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל –

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \geq \sup_{x \in X} |d(a, b) - 0| = d(a, b)$$

לכן הוכחנו את השוויון.

☺

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

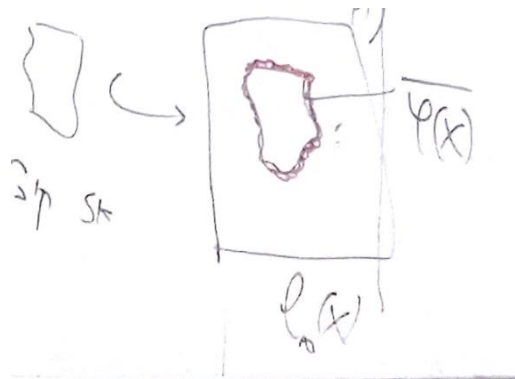
הוכחה ב – 2 דרכים:

דרך א':

הוכחנו: הוכחנו שלכל (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ –

$$\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. $(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup})$ מרחב $Banach$.



$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

$$X \xrightarrow{\varphi} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X)) \quad \text{– אז קיבלנו השלמה –}$$

☺

דרך ב': "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית", ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \xrightarrow{i} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים. ראו גם השלמה של $(C[a,b], d_1)$.



שלב א': עבור מ"מ נתון (X, d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{(X, d) \text{ קושי ב}\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$

$$\tilde{d}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{– נגדיר}$$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n, y_n)$ ס"ק ב \mathbb{R}

(רמז: שימו לב $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$)

לכן הסדרה $d(x_n, y_n)$ באמת מתכנסת ב \mathbb{R} כי \mathbb{R} שלם.

(\tilde{X}, \tilde{d}) מרחב פסאודו-מטרי.

שלב ב':

טענת עזר: (מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי)

נניח (\tilde{X}, \tilde{d}) מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי (\tilde{X}, \tilde{d}) מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x \Omega y \stackrel{def}{=} \tilde{d}(x, y) = 0$$

נקבל קבוצת מנה: $M := \tilde{X} / \Omega = \{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x] := \{y \in \tilde{X} \mid \tilde{d}(x, y) = 0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x], [y]) = \tilde{d}(x, y)$

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: (M, \bar{d}) מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (M, \bar{d}), x \mapsto [x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט -- נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו (\tilde{X}, \tilde{d}) של ס"ק.

$$X \xrightarrow{i} M \quad x \mapsto [\tilde{x}] \quad \text{נגדיר שיכון:}$$

כאשר $\tilde{x} \in \tilde{X}$ סדרה קבועה \dots, x, x, x . אז מתקיימים תנאים הבאים:
 i שיכון איזומטרי.

$$d(x, y) = \bar{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}])$$

$$\overline{i(X)} = M$$

(M, ρ) מרחב שלם!. מש"ל

☺

$$\text{דוגמה 1: } \mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$$

תזכורת: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

$$x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \quad p = 3$$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב- X .

דוגמה 2: $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \bar{d}_p)$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{ \text{שלמים } p\text{-אדיים} \} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k, b_k \in \underbrace{\{0, 1, \dots, p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם)! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

הגדרות: מ"מ (X, d) נקרא:

(א) "קומפקטי סדרתי" אם לכל סדרה ב- X יש תת-סדרה מתכנסת ב- X .

(ב) "קומפקטית" אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת-כיסוי סופי.

הערה:

(1) נוכיח בהמשך שבמרחבים מטריים ההגדרות הנ"ל הן שקולות.

(2) נוכיח גם (בעצם אתם מכירים) את משפט היינה – בורל $(Heine - Borel)$:

התנאים הבאים שקולים –

- $X \subset \mathbb{R}^n$ (כתת מרחב) הוא קומפקטי.
- X חסום וסגור.

תרגיל: הוכיחו שתת-קבוצה $X = \{e_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ במרחב הילברט l_2 הוא חסום וסגור

אבל X לא קומפקטי כמרחב מטרי.

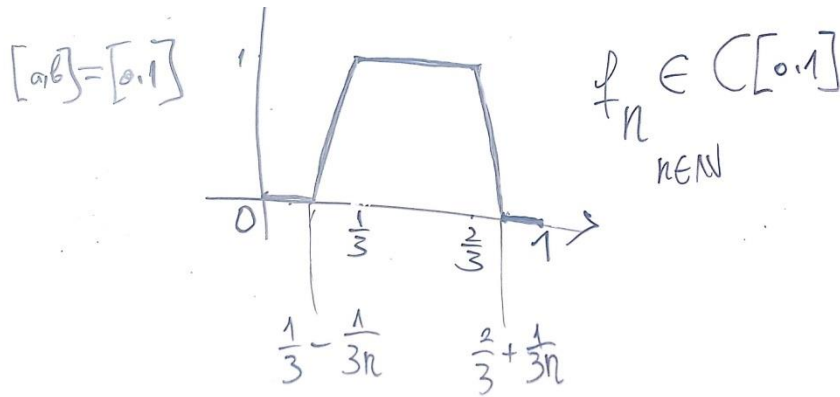
משפט: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

הוכחה:

- לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת (הגדרת "קומפקטיות סדרתית").
- אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת (תירגול).

דוגמה 3: $L_1[a, b] \hookrightarrow (C[a, b], d_1)$ השלמה, כאשר $L_1[a, b]$ פונקציות אינטגרביליות.

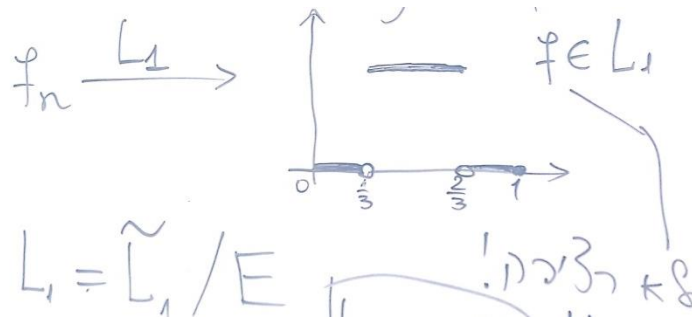
$(C[a, b], d_1)$ לא שלם!



ס"ק ב

(f_n)
 $(C[a, b], d_1)$ אבל לא מתכנסת ב- $(C[a, b], d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a, b]$:



כאשר: $E = \{f \mid \int_a^b |f| dx = 0\}$

\tilde{L}_1 מרחב פסאודו-נורמי! (אומרים גם סמי-נורמי). $L_1[a, b] = \tilde{L}_1 / E$. מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a, b]$.

(4) $L_2[a, b] \hookrightarrow (C[a, b], d_2)$ מקבלים מרחב הילברט. השלמה

הגדרה: A נקראת קבוצה סגורה (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

דוגמאות:

(1) $A = (0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב- $\mathbb{R} = X$.

(2) $A = [0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב- $\mathbb{R} = X$.

(3) $A = [0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב- $\mathbb{R} = X$.

(4) \mathbb{R}, \emptyset סגורות ב- \mathbb{R} .

הערה: לכל מרחב (X, d) – תת קבוצות X, \emptyset תמיד סגורות (כי $X = \emptyset^c, \emptyset = X^c$).

השאלה: מתי יש סגורות נוספות לא טריוויאליות?

הגדרה: מרחב (X, d) נקרא קשיר (connected) אם קבוצות סגורות במרחב הן רק X, \emptyset .

הגדרה שקולה להיות לא קשיר: אם קיים פירוק $X = X_1 \cup X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in \text{top}(d) \text{ (פתוחות)} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases} \text{ (שימו לב ש } X_1, X_2 \text{ סגורות לא טריוויאליות)}$$

למשל: אם: $\mathbb{R} \supset \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5, \infty)$

אז X לא קשיר. שימו לב ש $(5, \infty)$ סגורה ב- X (לא ב- \mathbb{R}).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב- $[2,4)$ כי $(B_{\frac{1}{2}}(2) = [2, 2.5) \subseteq [2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים \mathbb{Q} (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגורות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$$X_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב (\mathbb{Z}, d_p) (עם מטריקה p -אדית) הוא לא קשיר.

לסקרנים:

א. על מרחבים מטריים וטופולוגיה שלהם https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

ב. הל מרחבים שלמים https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_metric_space#Completion

ג. על המרחב (\mathbb{Z}, d_p) , השלמתו ("שלמים p-אדיים")

https://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number

<http://www.nt.th-koeln.de/fachgebiete/mathe/knospe/p-adic/>

הרצאה 4

קודם כל תזכורת לגבי הקומפקטיות מהרצאה 2:

משפט: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

הוכחה מהירה:

לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת ("קומפקטיות סדרתית").

אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת.

עכשיו נכיר הגדרה חדשה שעוזרת להבין את הקומפקטיות.

הגדרה: (חסימות כליל)

נניח נתון $\varepsilon > 0$. תת קבוצה A במרחב (X, d) נקראת **ε -צפופה** אם לכל $x \in X$ קיים $a \in A$ כך ש $d(a, x) < \varepsilon$.

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

הגדרה שקולה: $\bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) = X$

הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא **חסום כליל** (totally bounded) אם :

לכל $\varepsilon > 0$ נתון קיימת תת קבוצה **סופית** A_ε שהיא ε -צפופה ב (X, d) .

הגדרה: תת קבוצה Y במ"מ (X, d) נקראת **חסומה כליל** אם מרחב (Y, d_Y) ח"כ.

דוגמה: $\mathbb{R} = X$, $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, אז ת"ק $A_{\frac{1}{n}} = \{\frac{i}{n} : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$ -צפופה ב Y

תרגיל: ב $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ למצוא ת"ק שהיא $\frac{1}{100}$ -צפופה.

משפט: אם מרחב מטרי (X, d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup_{a \in X} B_\varepsilon(a) = X$ יש תת כיסוי סופי.

(כאן משתמשים בקומפקטיות "במובן הכיסויים": לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי)

דוגמה: (X, d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

תכונות:

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
- (תושטיות) אם (X, d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
- איחוד סופי של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
- אם תת מרחב מטרי (Y, d_Y) של מ"מ (X, d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.

הגדרה: תת קבוצה Y במרחב X נקראת צפופה אם $cl(Y) = X$.

תרגיל: הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

1. תת קבוצה Y צפופה ב (X, d) .
2. תת קבוצה Y ε -צפופה ב (X, d) לכל $0 < \varepsilon$.
3. $\forall x \in X \quad d(x, Y) = 0$.

דוגמה: $Y = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) ב $X = l_2$.

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.

Spoiler: מ"מ הוא קומפקטי אם ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

תזכורת: השלמה $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ כאשר:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\text{מספרים } p\text{-אדיים}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k, b_k \in \underbrace{\{0, 1, \dots, p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא גם קומפקטי (ראו את הממשפט מ Spoiler !)

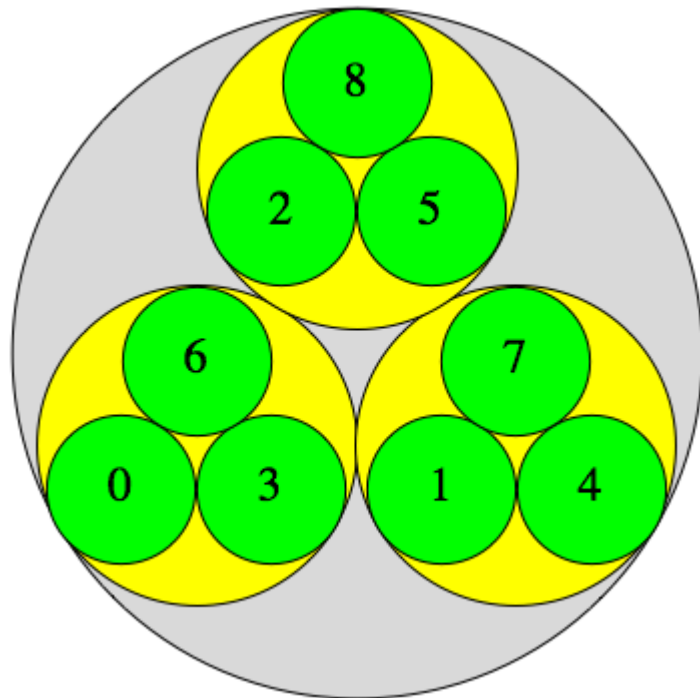
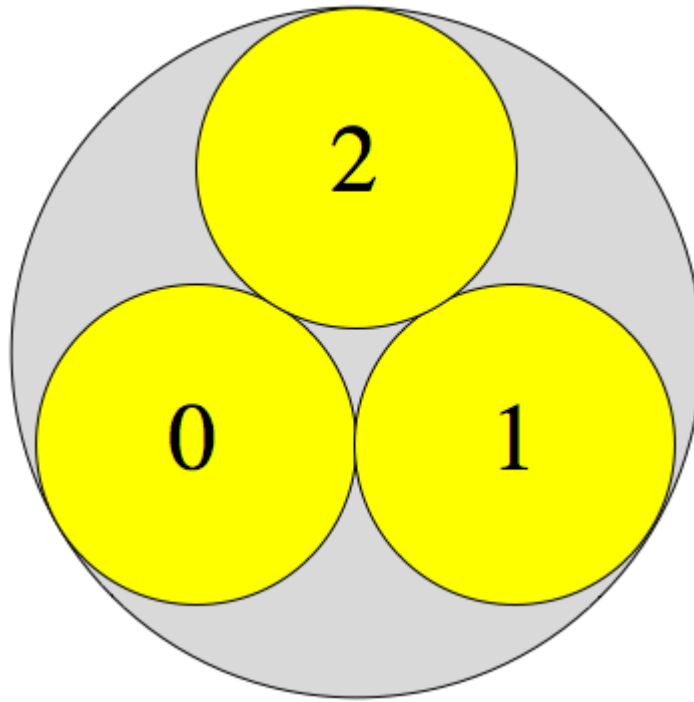
תרגיל: הוכיחו שמ"מ (\mathbb{Z}, d_p) חסום כליל ולא קומפקטי.

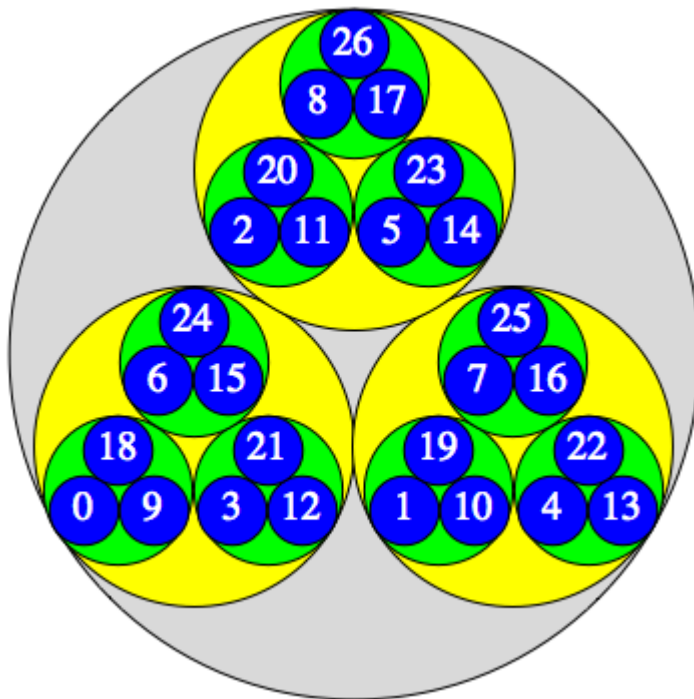
הסבר מקוצר: לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה

$$a_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$$

רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0, 1, \dots, p^k - 1\}$ היא ε -צפופה עבור $\varepsilon = ?$

ראו תמונות במקרה של $p = 3$





ת"ק $\{0\}$ ε -צפופה לכל $1 < \varepsilon$

ת"ק $A := \{0, 1, 2\}$ ε -צפופה לכל $\frac{1}{3} < \varepsilon$

הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $A = \{0, 1, 2\}$.

לכן לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים $a \in A$ כך ש $3 \mid (x - a)$. מכאן $d_3(x, a) \leq \frac{1}{3}$.

...

שאלה: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ לפי התמונות הנ"ל?

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות τ $P(X) := \{A \mid A \subseteq X\} \supseteq \tau$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$\emptyset, X \in \tau \quad (t_1)$$

$$O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau \iff i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ עבור } O_i \in \tau \quad (t_2)$$

(מספיק עבור $n = 2$).

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau \iff i \in I \text{ עבור } O_i \in \tau \quad (t_3)$$

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש- (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי** (*Topological space*) ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

(א) אומרים ש- $X \supseteq A$ היא תת קבוצה פתוחה (במ"ט (X, τ)) אם –

$$\boxed{\text{פתוחה } A \stackrel{\text{def}}{=} A \in \tau}$$

(ב) תת קבוצה $X \supseteq A$ נקראת קב' סגורה (במ"ט (X, τ)) אם המשלים פתוחה, ז"א –

$$\boxed{\text{פתוחה } A^c \stackrel{\text{def}}{=} \text{סגורה } A}$$

דוגמאות:

(1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X, d) : $(X, \text{top}(d))$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $\text{top}(d) = \{d \text{ קבוצות פתוחות במובן } d\}$.

הגדרה: אומרים שמ"ט (X, τ) הוא מטריזבילי אם קיימת מטריקה d כך ש $\tau = \text{top}(d)$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי פסאודו-מטריזבילי

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X, τ) מתקיים:

t_1^c סגורות. X, \emptyset

t_2^c איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

הוכחה: כללי \wedge *de Morgan* הגדרת *TOP*.

(2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$ מרחב טריוויאלי.

הערה: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = \text{top}(d_0)$ כאשר $d_0(x, y) = 0$.

(3) "טופולוגיה דיסקרטית": $\tau_{discr} := P(X) = \{X \text{ – תת קבוצות ב-}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה)

שימו לב: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

הגדרה: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת מבודדת (*isolated*) אם $\{a\} \in \tau$ (פתוח!).

לכן: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי \Leftrightarrow כל נקודה מבודדת בו.

הערה:

מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (מטריקת 1-0).

הערה: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

הגדרה: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X . אז אומרים ש- τ_2 חזקה יותר מ- τ_1 , ואומרים ש- τ_1 חלשה יותר מ- τ_2 .

(4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר - $\tau_\leq := \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}$ טופולוגיה Sierpinski $\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ לא.

הגדרה (תת מרחב טופולוגי): יהי $(X, \tau) \ni TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

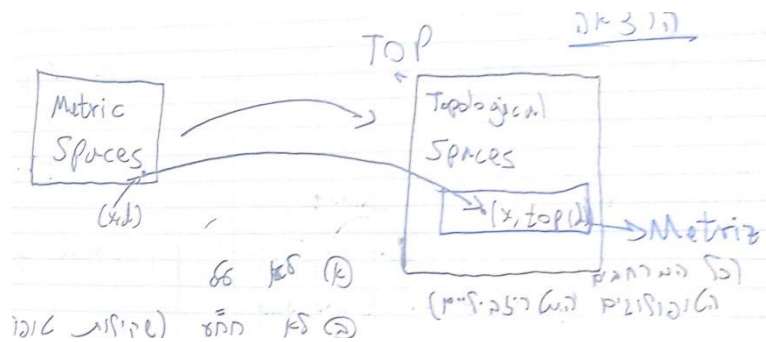
מגדירים טופולוגיה תת מרחב מעל Y :

$$\tau_Y := \{O \cap Y | O \in \tau\}$$

תבדוקו ש- $(Y, \tau_Y) \ni TOP$.



הערה:

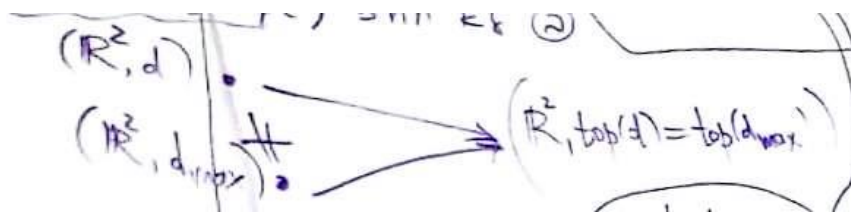


$$\{metric spaces\} = Metr \rightarrow TOP = \{topological spaces\}, (X, d) \mapsto (X, top(d))$$

(א) לא על.

(ב) לא חח"ע.

הסבר ב': (שקילות טופולוגית של מטריקות)



הסבר א': שקול להגיד, שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

$X := \{0,1\}$. (X, τ_{\leq}) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!)..

$$\tau_{\leq} = \left\{ \underbrace{\{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}, \emptyset\}}_{\text{סגורות}}, \underbrace{\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}}_{\text{פתוחות}} \right\}$$

הסבר:

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש $\tau_{\leq} = \text{top}(\rho)$.

הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי: $(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \notin \text{Metriz}$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח ש $(\{0,1\}, \tau_{\leq})$ לא פסאודו-מטריזבילי – נניח בשלילה ש

2 מקרים:

(1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $d_0 = \rho$. מצד שני, $\tau_{\leq} \neq \text{top}(d_0) = \{\emptyset, \{0,1\}\}$

(2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $\tau_{\leq} \subsetneq \text{top}(\rho) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

(5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\tau_{\text{cofinite}} := \{F^c \mid F \subseteq X \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

לבדוק: $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

הערה:

$$(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofinite}}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} \mid F \subset \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\} \notin \text{Metriz}$$

רמז: לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

הגדרות:

יהי (X, τ) מ"ט.

(1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק'** $a \in X$ אם קיימת קבוצה פתוחה O ($\tau \ni O$)

כך ש – $a \in O \subseteq V$

נסמן – $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a .

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

אזהרה: **סביבה** לא חייבת להיות פתוחה.

(2) באופן דומה נגדיר **סביבה** V לתת קבוצה $A \subseteq X$ –

$$\exists 0 \in \tau: A \subseteq O \subseteq V$$

(3) אומרים שנקודה a היא נק' פנימית של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in A^\circ$ או $a \in \text{int}(A)$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A : $\text{int}(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

הערה: תמיד $\text{int}(A) \subseteq A$.

טענה: $A \in \tau$ פתוחה $\Leftrightarrow \text{int}(A) = A$

קריטריון לפתיחות

רמז: שימוש ב t_3 .

הגדרה: X מקיימת תכונת Hausdorff (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (פתוחות) זרות.
בה"כ

הגדרה:

(4) הסגור - closure : עבור $A \subseteq X$ נגדיר:

$$z \in \text{cl}(A) = \bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$z \in \text{cl}(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A .

הערה: תמיד $A \subseteq \text{cl}(A)$.

תרגיל: $A \text{ סגורה} \Leftrightarrow A = \text{cl}(A)$.

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים \mathcal{E} -סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

התכנסות סדרות:

$$n \mapsto f(n) = x_n \quad \mathbb{N} \xrightarrow{f} X$$

לסדרה x_n במ"ט (X, τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש- $a \in X$ גבול של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U . ז"א

$$(U \text{ תלוי בסביבה } n_0) \quad \forall U \in N(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$$

$$\text{סימון: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{או} \quad x_n \xrightarrow{\tau} a$$

רציפות פונקציות:

נייה $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת רציפה בנקודה $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \exists V \in N(a) f(V) \subseteq U$$

אומרים רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X, Y)$.

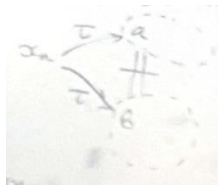
הערה: (כמו במ"מ) פונקציה $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ בין 2 מ"ט רציפה אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור). נוכיח בהמשך.

משפט: (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X, τ) עם תכונה T_2 (Hausdorff), גבול של סדרה תמיד יחיד (אם קיים!).

הוכחה:



נניח בשלילה ש- $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$U \cap V = \emptyset$ - כך ש- $N(a), V \in N(b)$ קיימות סביבות זרות $U \in N(a)$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n , וגם V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה..
סתירה!

■

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את הסגור הסדרתי לפי:

$$z \in scl(A) \stackrel{def}{=} \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A: a_n \xrightarrow{\tau} z$$

• תמיד $A \subseteq scl(A)$ (רמז: סדרות קבועות)

• טענה: במ"ט תמיד $scl(A) \subseteq cl(A)$.

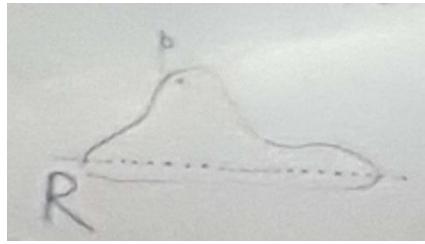
הוכחה: נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z .

לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U . אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$.
לכן $z \in cl(A)$.

☺

• הערה חשובה: אבל לא תמיד יש שוויון $scl(A) = cl(A)$

דוגמה: נגדיר $X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin \mathbb{R}$



$$\tau := \{O \subseteq X \mid p \in O \Rightarrow |O^c| \leq \aleph_0\}$$

ז"א אם $O \in \tau$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה.
לבדוק:

- $(X, \tau) \in TOP$ (לבדוק גם T_2).
- שימו לב: תת מרחב טופולוגי $Y := (\mathbb{R}, \tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל
- נקבל \mathbb{R} עם טופולוגיה דיסקרטית. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq cl(\mathbb{R}) = X$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X, τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה!
- $(X, \tau) \notin Metriz$

אקסיומות הפרדה נוספות:

הגדרות: נניח $A, B \subseteq X$. אומרים:

(א) קיימת הפרדה סביבתית של A, B (במ"ט (X, τ)) אם –

$$\exists U \in N(A), V \in N(B) : U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות (פתוחות) זרות).
בה"כ



(ב) קיימת הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn אם:

$$\exists f \in C(X, [0,1]) : f(A) = 0, f(B) = 1$$



הפרדה קבוצתית.

טענה: מהפרדה פונקציונלית נובעת

הוכחה:

ניקה סביבות פתוחות זרות של $0, 1$ ב- $[0, 1]$.

$$U := \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right)}_{0 \in U} \cap V := \underbrace{\left(\frac{2}{3}, 1\right]}_{1 \in V} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A, B .

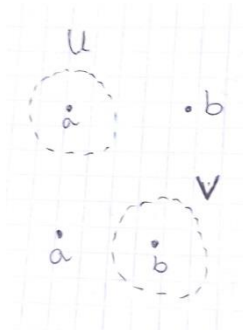
■

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_0** , כלומר: $(X, \tau) \in T_0$ (Kolmogorov) – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

$$(1) \exists U \in N(a): b \notin U$$

או

$$(2) \exists V \in N(b): a \notin V$$



הגדרה: X מקיימת **תכונה T_1** ,

כלומר: $X \in T_1$ – אם מתקיימים שתי

התנאים מקודם (1) + (2).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

$$(1) X \in T_1$$

(2) כל נקודון סגור.

(3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה:

תמיד $(X, \tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1 .

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (פתוחות) זרות.
בה"כ

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_3** , כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:
(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ יש הפרדה סביבתית.

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$ (רמז: ניקח נקודות $\{b\} := B \dots$)

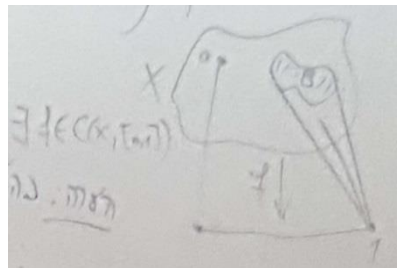
הערה:

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$, ולעיתים $Regular = T_3$ (ב)

הגדרה: X מקיימת **תכונה $T_{3\frac{1}{2}}$** , כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.



$T_{3\frac{1}{2}}$

הערה: מהטענה $T_3 \supset \Leftarrow$

הערה:

(1) $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff.

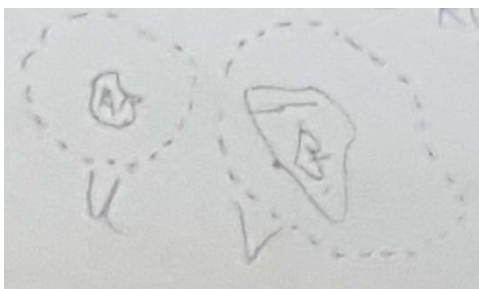
(2) לעיתים על $T_{3\frac{1}{2}}$ (ב) אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין.

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_4** , כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות זרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $(\exists U \in N(A), \exists V \in N(B): U \cap V = \emptyset)$.)



הערה:

(1) לעיתים אומרים $Normal Space =$ מרחב נורמלי.

(2) ולעיתים אומרים נורמלי על T_4 (ב) בלבד.

הערה: לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

משפט Urysohn: $T_4^f = T_4$

יהי $X \in T_4^f$. אז מתקיים $X \in T_4$. ז"א לכל זוג A, B קבוצות סגורות זרות קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B .

הערה: בהמשך נוכיח דרך "Onion Argument" of Urysohn.

הערה: $TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4$

Spoiler: בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metrizable$ $T_4 \supset Compact \cap T_2$

הערה:

לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות ממש).

ראו קובץ באתר של המרצה - Separation Axioms.

$$\{0,1\}, \tau_{tr} \in Top \quad (1)$$

$$\{0,1\}, \tau_{tr} \notin T_0$$

$$\{0,1\}, \tau_{\leq} \in T_0 \quad (2)$$

$$\{0,1\}, \tau_{\leq} \notin T_1$$

$$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1 \quad (3)$$

$$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$$

כאשר: $\tau_{cof} := \{F^c \mid F \subseteq \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X, \tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X אינסופית.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U, V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי –

$$U := F_1^c, V := F_2^c$$

ולכן – $\emptyset \stackrel{\text{אם נניח}}{=} U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$

$$X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}} \quad \text{— אז}$$

בסתירה!

■

הגדרות: נניח (X, τ) מ"ט.

(א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא פירוק טופולוגי אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – סגורות (ז"א סגור+פתוח).

(ב) אומרים (X, τ) קשיר (Connected) ונסמן: $(X, \tau) \in Conn$ אם לא קיים פירוק טופולוגי ל- X .

הערה: (X, τ) לא קשיר אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגורה לא ריקה ששונה מ- X .

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in TOP$ כך ש- $X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים סכום טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$ כקבוצה $X = X_1 \cup X_2$ עם טופולוגיה הבאה

$$\tau := \{O_1 \cup O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב הסכום תמיד לא קשיר.

הרצאה 5

תכונות (int, cl, ∂ , סביבות): במ"ט (X, τ)

$$(1) \quad \forall a \in X: X \in N(a) \quad (\text{רמז: } t_1).$$

(2) חיתוך סופי של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: t_2 .

$$(3) \quad V \in N(a) \Leftrightarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$$

$$(4) \quad \boxed{\int_{A^\circ} \text{int}(A) \subseteq A \subseteq \text{cl}(A) \int_{\bar{A}}}$$

(5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$$\text{int}(A_1) \subseteq \text{int}(A_2)$$

$$\text{cl}(A_1) \subseteq \text{cl}(A_2)$$

$$\text{scl}(A_1) \subseteq \text{scl}(A_2)$$

(6) $\boxed{\text{int}(A) = A \Leftrightarrow A \text{ פתוחה}}$: קריטריון לפתיחות:

$$A = \bigcup_{a \in A} O_a \quad \text{רמז: } t_3$$

(7) $\boxed{\text{cl}(A) = A \Leftrightarrow A \text{ סגורה}}$: קריטריון לסגירות:

$$(\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)) \quad \text{ז"א: } A^\circ = A^\circ \quad (8)$$

$$A^\circ \in \tau \quad \text{ז"א } A^\circ \text{ תמיד פתוחה.} \quad (9)$$

$$\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ} \quad \text{(לכל מספר סופי).} \quad (10)$$

(11) $A^\circ = \text{קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של } A$, כלומר –

$$\bigcup \{O \subseteq X \mid O \subseteq A, O \in \tau\}$$

$$\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A) \quad \text{ז"א } \bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad (12)$$

(13) \bar{A} תמיד קב' סגורה.

(14) $\bar{A} = \text{קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את } A$, כלומר –

$$\bigcap \{B \subseteq X \mid B \supseteq A, B \text{ סגורה ב-} X\}$$

(15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אז:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

$$\text{הסבר: } O \setminus B = O \cap B^c \quad B \setminus O = B \cap O^c$$

(16) משפט הקשר בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

$$\boxed{\text{cl}(A^c) = (\text{int}(A))^c} \quad \text{א.}$$

$$\text{int}(A^c) = (\text{cl}(A))^c \quad \text{ב. שקול:}$$

הוכחה: א \Leftrightarrow ב כי נוכל להציב $A := A^c$. מ"ל (א)

$$x \in (\text{int}(A))^c$$

\Updownarrow

$$x \notin \text{int}(A)$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \\ & \forall U \in N(x) : U \not\subseteq A \\ & \Leftrightarrow \\ & \forall U \in N(x) : U \cap A^c \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \\ & x \in cl(A^c) \\ & \odot \end{aligned}$$

$$(17) \quad \overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \quad (\text{לכל מס' סופי}).$$

$$\partial(A) := \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{הגדרה: השפה של } A$$

$$(18) \quad \partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

$$\text{הסבר: } \partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c \stackrel{16.1}{=} \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

$$(19) \quad \partial(A) \text{ תמיד סגורה!}$$

הסבר: כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

$$(20) \quad \boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$$

$$(21) \quad \partial(A) = \{x \in X \mid d(x, A) = 0, d(x, A^c) = 0\} \quad (\text{במ"מ } (X, d))$$

הסבר: תכונות הסגור במ"מ.

הגדרה: א. תת קבוצה A במ"מ (X, τ) נקראת צפופה אם $cl(A) = X$.

שקול: לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A \cap O \neq \emptyset$.

ב. מ"מ (X, τ) נקרא ספרבילי אם קיימת ת"ק צפופה ובת מניה. סימון: $(X, \tau) \in \text{Sep}$.

תרגילים מומלצים:

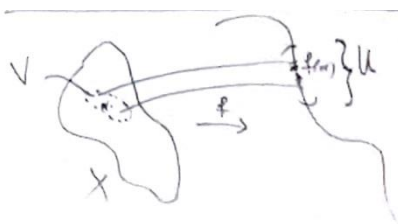
- מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.
- $(X, \tau_{discr}) \in \text{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X, d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X, \text{top}(d))$ אם היא ε -צפופה לכל $\varepsilon > 0$.
- אם מ"מ (X, d) הוא חסום כליל אז הוא ספרבילי. ז"א $(X, \text{top}(d)) \in \text{Sep}$.

הסיקו שאם (X, d) קומפקטי אז $(X, \text{top}(d)) \in \text{Sep}$.

$$** \text{ הוכיחו: } \mathbb{R}^n \in \text{Sep} \quad l_2 \in \text{Sep} \quad l_\infty \notin \text{Sep}$$

רציפות פונקציות: תכונות נוספות

תזכורת: (רציפות בנקודה): נניח שנתונה פונ' בין מ"ט $(Y, \sigma) \xrightarrow{f} (X, \tau)$. נקראת רציפה בנקודה אם: $\forall U \in \mathcal{N}(f(a)) \exists V \in \mathcal{N}(a): f(V) \subseteq U$



$$N(f(a)): f^{-1}(U) \in$$

שקול: $\forall U \in N(f(a))$

(מילולית: מקור של סביבה (ל) - $f(a)$ גם סביבה (ל) - a).

משפט (קריטריון לרציפות): נניח $(Y, \sigma) \xrightarrow{f} (X, \tau)$ פונ' בין מ"ט. התנאים שקולים:

(1) רציפה (בכל נקודה).

(2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

(3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

$$(4) \forall A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl(f(A))$$

$$(5) f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$$

הוכחה:

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

נניח $0 \in \sigma$. צ"ל - $f^{-1}(0) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(0)$ צ"ל $a \in int(f^{-1}(0))$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(0)$$

\Downarrow

$$f(a) \in 0 \in \sigma$$

\Downarrow

$$0 \in N(f(a))$$

↓ הגדרת הרציפות בנקודה a

$$a \in f^{-1}(0) \in N(a)$$

↓ הגדרת נקודות פנים

$$a \in \text{int}(f^{-1}(0))$$

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \text{ כי } (2) \Leftrightarrow (3)$$

$$(4) \Leftrightarrow (5) \text{ ברור.}$$

$$\text{נוכיח } (3) \Leftarrow (5)$$

נניח $A \subseteq X$. צ"ל - $f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A))$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$$

המעבר האחרון נובע מזה ש - $f(A) \subseteq \text{cl}(f(A))$. נפעיל "cl" בשני האגפים:

$$\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}\left(f^{-1}(\text{cl}(f(A)))\right) \stackrel{(*)}{=} f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" - $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \text{cl}(A_1) \subseteq \text{cl}(A_2)$)

הסבר (*):

(א) $\text{cl}(B)$ סגור.

(ב) נתון (3).

(ג) B סגור $\Leftrightarrow \text{cl}(B) = B$

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f(\text{cl}(A)) \subseteq f f^{-1}(\text{cl}(f(A))) \subseteq \text{cl}(f(A))$$

$$\text{נוכיח } (4) \Leftarrow (1)$$

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת סביבה פתוחה U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin \text{int}(f^{-1}(U))$

$$a \in \left(\text{int}(f^{-1}(U))\right)^c \stackrel{\text{תכונת הקשר}}{=} \text{cl}(f^{-1}(U)^c) \text{ שקול:}$$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in \text{cl}(f(f^{-1}(U)^c)) = \text{cl}(f(f^{-1}(U^c))) \subseteq \text{cl}(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן Y/U סגורה וסגור של סגורה שווה לעצמה).

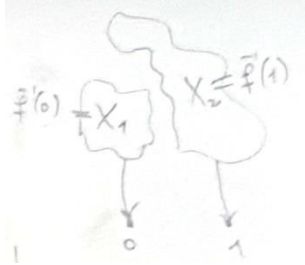
קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

משפט: התנאים הבאים שקולים:

(1) $(X, \tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

(2) קיימת פונקציה רציפה $f: X \rightarrow [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



הוכחה: לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \emptyset & \{0,1\} \cap O = \emptyset \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

☺

שימו לב: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל-"משפט ערך ביניים".

תרגיל: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינת χ_A של $A \subseteq X$ היא

$$\partial(A) \text{ כאשר: } \chi_A: X \rightarrow \{0,1\}, \chi_A(a) = 1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \notin A$$

משפט: (Heine- $\frac{1}{2}$) כל רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

$$x_n \xrightarrow{\tau} a \iff f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a) \quad \text{הוכחה: צריך להוכיח}$$

שקול להוכיח – $\forall U \in N(f(a)) \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N(f(a))$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{נתון}$$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in f^{-1}(U)$

$$\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U \quad \text{מכאן}$$

☺

הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון! (עיקרון Heine). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט.

דוגמה מתאימה (תזכורת):

$$X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin \mathbb{R}$$



$\tau :=$

$$(X, \tau) \in T_2 \quad \{O \subseteq X | p \in O \Rightarrow |X/O| \leq \aleph_0\}$$

(נשים לב ש τ - $\{x\} \in \tau$ $\forall x \neq p$.)

שימו לב:

(1) τ לא דיסקרטית (נק' לא מבודדת).

(2) תת מרחב \mathbb{R} ביחס ל τ הוא דיסקרטי.

(3) במרחב (X, τ) יש רק התכנסות טריוויאלית של סדרות

$$(x_n \xrightarrow{\tau} a \Leftrightarrow x_n \text{ קבועה לבסוף} = a)$$

הסבר של 3:

מ"ל רק עבור $a = p$ (מדוע? כי כל נקודה אחרת היא מבודדת ואז ניתן לקחת את הנקודה בתפקיד של סביבה ואז מהגדרת התכנסות לפי סביבות).

צריך להוכיח שאם סדרה a_n ב X שואפת ל p אז הסדרה קבועה לבסוף. נסמן

$$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R} \quad \text{ברור ש } A \text{ בת מניה. נגדיר } U := X \setminus A \quad \text{אז } U \in N(p)$$

מצד שני לפי הגדרת $\lim a_n = p$ כמעט כל האיברים של הסדרה נמצאים ב U .

נזכיר $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ $U \cap A = \emptyset$ לכן כמעט כל האיברים של הסדרה הם p .

$$\text{נגדיר } (X, \tau) \xrightarrow{f=id} (X, \tau_{discr}) \text{ אז הפונקציה הזאת -}$$

(א) לא רציפה

(ב) f שומרת על התכנסות

קיבלנו שעיקרון Heine כאן לא מתקיים!

עוד מסקנה: $(X, \tau) \notin \text{Metriz}$

(כי בין מרחבים מטריזביליים עיקרון Heine, כן תמיד נכון!).

תכונות נוספות של פונקציות רציפות:

• כל $(X, \tau_{discr}) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ תמיד רציפה.

• כל $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau_{tr})$ תמיד רציפה.

• הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \rightarrow X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$

$f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ היא גם רציפה.

• הוכיחו שבכל מ"ט (X, τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

(א) $f_1 + f_2 \in C(X)$

(ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$

(ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש- $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוה לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f : X \rightarrow Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש- $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית –

$$\boxed{\begin{array}{l} f_0 \\ A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a) \end{array}}$$

גם רציפה.

הוכחה:

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב- B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A .

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A \mid f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \stackrel{f(A) \subseteq B}{=} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\text{פתוחה ב- } X} \cap A \\ &\quad \text{בגלל רציפות } f \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב- A (תת מרחב).

☺

שאלה כללית: איזו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

(פונקציה רציפה על $f : X \rightarrow Y = f(X)$)

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל :

קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית, קשירות, ספרביליות

בינתיים מומלץ לנסות לבד !

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח $f: X \rightarrow Y$ רציפה על, ז"א $f(X) = Y$.

$$\overline{f(A)} = Y \Leftarrow \bar{A} = X$$

$$\overline{f(A)} = f(X)$$

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$$f(X) \subseteq \overline{f(A)} \quad \bar{A} = X \text{ ונקבל}$$

$$\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$$

$$\overline{f(A)} = f(X) = Y \quad \text{לכן קיבלנו:}$$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש- $\bar{A} = X, |A| \leq \aleph_0$

$$\overline{f(A)} = f(X) = Y$$

מכאן גם $Y \in Sep$ גם בת מנייה! $|f(A)| \leq \aleph_0$

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב- $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב- TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $f: (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. נקרא הומיאומורפיזם

($Homeomorphism$ אזהרה: זה לא $Homomorphism$)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

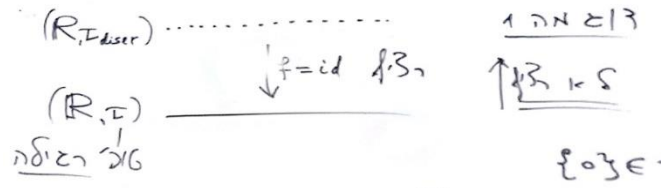
(א) f חז"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

(ב) רציפה.

(ג) f^{-1} רציפה.

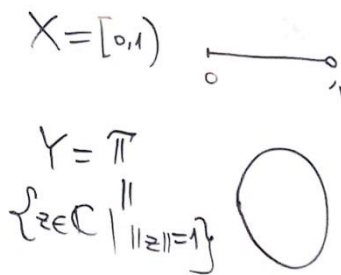
הערה: $(\text{ג}) \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{א}) \\ (\text{ב}) \end{cases}$

דוגמה 1:

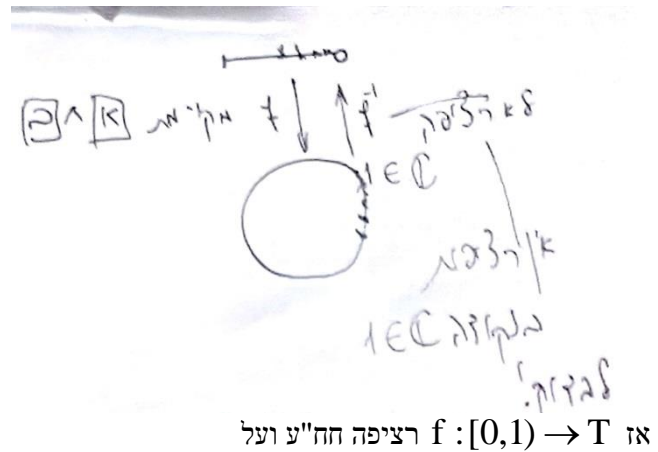
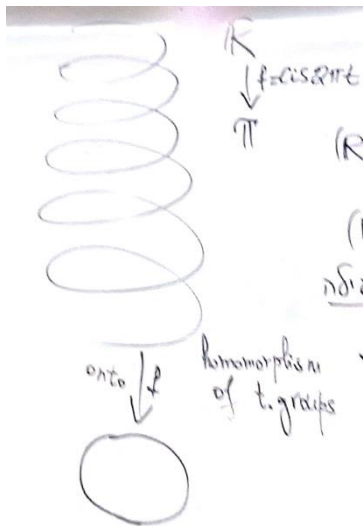


$f^{-1}: (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f = id: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{discr})$
 $f^{-1}(0) = \{0\} \notin \tau$ אבל $\{0\} \in \tau_{discr}$

דוגמה 2:



נגדיר $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$, $q(t) = cis(2\pi t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$
 זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).
 כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{T}$



אז $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{T}$ רציפה חז"ע ועל
 אבל $f^{-1}: \mathbb{T} \rightarrow [0, 1)$ לא רציפה בנקודה $z = 0 \in \mathbb{T}$
 (למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0, 1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב \mathbb{T})

הגדרה: פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.

באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

שימו לב: נניח $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).

דוגמאות:

- הפונקציה הנ"ל $f: [0,1] \rightarrow T$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- היטל $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל לא סגורה.
- $f: [0,1] \cup [2,3] \rightarrow [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [2,3] \end{cases}$ רציפה על סגורה לא פתוחה.
- $f: [0,3] \rightarrow [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,3] \end{cases}$ רציפה על סגורה לא פתוחה

הרצאה 6

תזכורת:

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. נקרא הומיאומורפיזם

(Homeomorphism אזהרה: זה לא Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(א) f חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

(ב) רציפה.

(ג) f^{-1} רציפה.

הגדרה: נסמן $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $f: X_1 \rightarrow X_2$ homeomorphism ונגיד

מרחבים הומיאומורפיים.

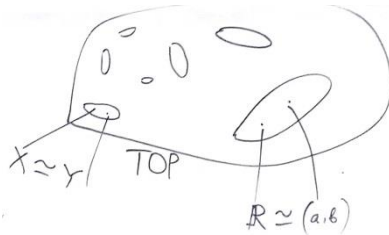
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות:

$$(1) (X, \tau) \simeq (X, \tau)$$

$$(2) (X_2, \tau_2) \simeq (X_1, \tau_1) \Leftrightarrow (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$$

$$(3) (X_1, \tau_1) \simeq (X_3, \tau_3) \Leftrightarrow \begin{cases} (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2) \\ (X_2, \tau_2) \simeq (X_3, \tau_3) \end{cases}$$

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב- id , בשביל (2) ב- f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



שאלה חשובה: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X, Y הם הומיאומורפיים או ומתי לא ?

$$X \neq Y \text{ או } X \approx Y$$

שאלה יותר כללית: מתי קיימת פונקציה רציפה ועל $X \xrightarrow{f} Y$

(ז"א מתי $Y = \text{"תמונה רציפה" של } X$).

הערה: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

(א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

(ב) כל תכונה מטרתית נשמרת ע"י איזומטריה.

שאלה: למיין קטעים ב- \mathbb{R} :

(א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

(ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

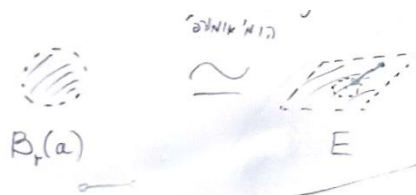
- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f : A \rightarrow f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$: הזזות $T_v : E \rightarrow E$, $T_v(x) = v + x$ תמיד איזומטריות.
- כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם:

$$c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \text{ קבוע נתון, } M_c(x) = c \cdot x, M_c : E \rightarrow E \in Lip_{|c|}$$

$$M_c^{-1} = M_{c^{-1}}$$

משפט: כל מרחב נורמי \cong לכל כדור פתוח שלו.

הומיאומורפי



הוכחה:

שלב א' - $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

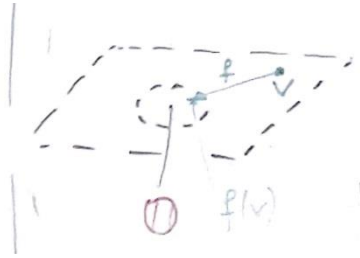
כי: $B_1(0) \underset{M_r}{\simeq} B_r(0) \underset{T_a}{\simeq} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' - מ"ל ש: $E \underset{f}{\simeq} B_1(0)$

נגדיר $f: E \rightarrow B(0_E, 1)$ $f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v$

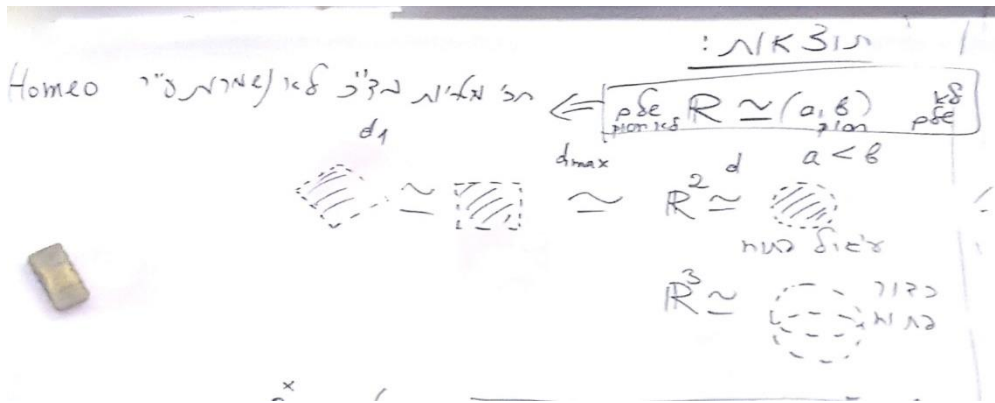
$f^{-1}: B(0_E, 1) \rightarrow E$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$



$\mathbb{R} \simeq (-1, 1) \simeq (a, b)$

תוצאות:

$\mathbb{R}^n \simeq B(v, r) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$



המשך דוגמאות:

- $a < b, c < d$ כאשר $[a, b] \simeq [c, d]$ (למצוא הומיאומורפיזם פונקציה לינארית למקוטעין).
- $(a, \infty) \simeq (c, d) \simeq (-\infty, b)$

(חלק מההסבר: $(0, \infty) \simeq \mathbb{R}$)
 $\begin{matrix} 2^x \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \log_2 \end{matrix}$

- $(0, 1) \not\simeq [2, 3]$

כי הקטע הסגור קומפקטי בעוד שהקטע הפתוח לא קומפקטי. אפילו לא קיימת פונקציה רציפה ועל מ - [2,3] על- (0,1) כי קומפקטיות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

$$[3,8] \neq [0,1] \cup [3,6] \quad \bullet$$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר (למרות ששניהם קשירים ולא קומפקטיים).

$$[0,1] \neq (2,5) \quad \bullet$$

ב - (2,5) כל נקודה היא "נקודה מחלקת" $((2,5)/\{c\} \notin Conn)$. אבל ב - [0,1] יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $[0,1]/\{0\} \in Conn$

הגדרה: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **מחלקת** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם). **טענה:** אם $X \xrightarrow{f} Y$ המיאומו' אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$$\text{גם הומיאומורפיזם.} \quad \underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק} \\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f^*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$$

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר מרכיבי קשירות.

- הוכיחו ש - $8 \neq 0$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- * למיין:

(א) את כל "הספרות"

◀1234567890▶

(ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

- כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

היא רציפה (ליפשיץ - $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

↓

- $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה $(\det(A_f) \neq 0)$. אזי f הומיאומורפיזם.

תרגיל: הוכיחו שכל ריבוע/עיגול הומיאומורפי עם אליפסה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

תרגיל: הוכיחו שכל הכדורים ב (\mathbb{Z}, d_p) הם הומיאומורפיים.

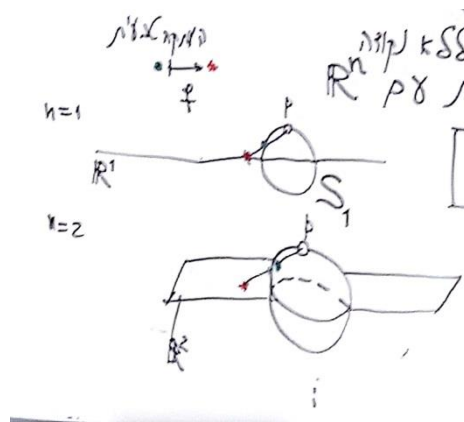
• היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n – מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם \mathbb{R}^n .

$$S_n / \{z\} \simeq \mathbb{R}^n$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1, 2$ נגדיר f לפי:



הגדרות: (אוטומורפיזמים)

חבורת הומיאומורפיזמים של מ"ט

$$Homeo(X) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ הומיאומורפיזם}\}, X \in TOP$$

חבורת איזומטריות של מ"ט

$$Iso(X) := \{(X, d) \rightarrow (X, d) \mid \text{איזומטריות}\}, X = (X, d) \in Metr$$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז $Iso(X, d)$ תת חבורה של $Homeo(X, \tau)$.

$$Iso(X) \leq Homeo(X) \leq \underbrace{(S_X, \circ)}_{\text{חבורה סימטרית ת"ח}}$$

הגדרה: נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X) \times X \rightarrow X \quad (f, x) \mapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in Homeo(X)\}$ – אורביטה (מסלול) של x .

אומרים ש X הוא מ"ט הומוגני (homogeneous) אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall x, y \in X, \exists f \in Homeo(X): f(x) = y$

דוגמה: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני (מה הוא (X, τ_{discr}) Homeo(?))

דוגמה: $X = (0, 2)$ מ"ט הומוגני.

דוגמה: אם $X = [0, 1) \cup \{3\}$ אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad \left[\frac{1}{2}\right] = (0, 1)$$

הגדרה: באופן דומה מגדירים מ"מ (X, d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \rightarrow X$ יש מסלול אחד).

דוגמה: \mathbb{R}^n , מרחב נורמי, S_n , (\mathbb{Z}, d_p) מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1, 1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

תרגיל: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

(א) $X = (3, \infty)$

(ב) $X = [0, 1]$

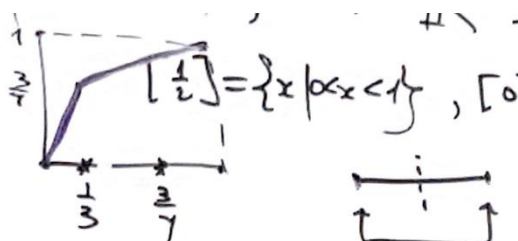
(ג) $X = 8$

(ד) $X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup \{7\}$

תשובה:

(א) מסלול 1 (הומוגניות!). $\mathbb{R} \simeq (3, \infty)$ ו- \mathbb{R} הומוגני (הזזות).

(ב) 2 מסלולים. $[0] = \{0, 1\} = [1]$ $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x \mid 0 < x < 1\}$



הערות:

מסלולים קיימים $\{0, 1\}$ ו- $(0, 1)$



לא קיים $h \in Homeo([0, 1])$ כך ש $h(0) = x, 0 < x < 1$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

קשירות (המשך)

משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש- $X \in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X) = Y$ צ"ל - $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq \emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq \emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

$$X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2) \quad \text{אזי}$$

כאשר נשים לב ש- $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ היא פונקציה על וגם הן פתוחות כי f רציפה. קיבלנו ש- X פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

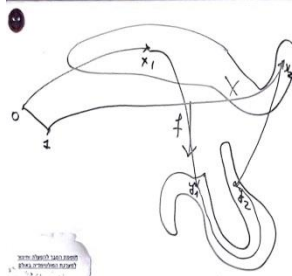
☺

הגדרה: מ"ט X קשיר מסילתית אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y . מסילה מ x_1 ל x_2

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \text{פונקציה רציפה, } \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2. \quad \text{סימון: } X \in PConn.$$

משפט: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש- $X \in PConn$. על ורציפה אז $f(X) = Y$ צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים x_1, x_2 כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$.

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y \quad [0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y \quad \text{נגדיר מסילה -}$$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל- y_2 .

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומואומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה ועל $f : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ (Peano curve).

משפט: $PConn \subset Conn$

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \cup X_2$

נבחר $x_2 \in X_2, x_1 \in X_1$.

$X \in PConn \Leftrightarrow$ קיימת מסילה מ- x_1 ל- x_2 , לכן –

$$\varphi : [0,1] \rightarrow X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$$

$$[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \cup \varphi^{-1}(X_2) \quad \text{כעת –}$$

$\varphi^{-1}(X_1), \varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

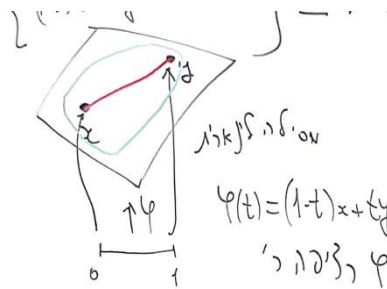
לא ריקות ($0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2)$)

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש- $[0,1] \in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה (convex)** אם לכל $x, y \in X$ מתקיים –
 $\{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית)

נסמן – $X \in Conv$



$$\varphi(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$$

הערה: φ רציפה כי

הערה:

$\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$ – רציפה כי

טענה: $Conv \subset PConn$

$$Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn$$



דוגמה:

הגדרה: $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ קטע אם לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$.

טענה: נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

(2) $X \in Conv$

(3) $X \in PConn$

(4) $X \in Conn$

הסבר: (1) \Leftrightarrow (2): לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$. מצד שני

$$[a, b] = \{a + (b - a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) נובע מהכללות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

(4) \Rightarrow (1)

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a, b \in X$ כך ש $[a, b] \not\subseteq X$. ז"א קיימים

$$a < c < b \text{ ש } a, b \in X \text{ אבל } c \notin X$$

$$\text{נגדיר } X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X$$

$$\text{ואז נקבל ש } X = \underbrace{X_1}_{a \in} \sqcup \underbrace{X_2}_{b \in}$$

ואז קיבלנו ש $X \notin Conn$ - בסתירה!

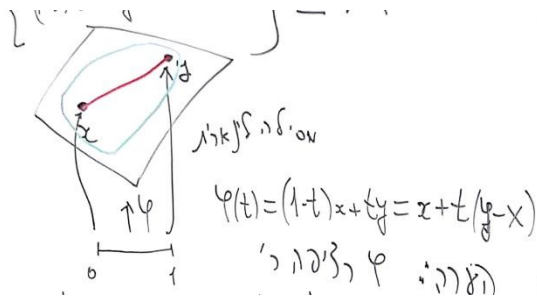


משפט (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) $X \in Conn$.

(2) לכל פונקציה רציפה $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ יש תכונת ערך ביניים.

הרצאה 7



תזכורת: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת קבוצה קמורה (convex) אם לכל $x, y \in X$ מתקיים $\{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית).

סימון: $X \in Conv$

הערה: φ רציפה כי $\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$

טענה: $Conv \subset PConn$

$$Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn$$



דוגמה:

הגדרה: $\mathbb{R} \subseteq X \neq \emptyset$ קטע אם לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$.

טענה: נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

(2) $X \in Conv$

(3) $X \in PConn$

(4) $X \in Conn$

הסבר: (2) \Leftrightarrow (1): לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$. מצד שני

$$[a, b] = \{a + (b-a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) נובע מהכלות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

(4) \Rightarrow (1)

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a, b \in X$ כך ש $[a, b] \not\subseteq X$. ז"א קיימים

$$a < c < b \text{ אבל } c \notin X$$

$$X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X \text{ נגדיר}$$

$$\text{ואז נקבל ש } X = \underbrace{X_1}_{a \in} \cup \underbrace{X_2}_{b \in} \text{ פירוק טופולוגי.}$$

ואז קיבלנו ש $X \notin Conn$ - בסתירה!



משפט (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$X \in Conn \quad (1)$$

(2) לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

הוכחה:

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $f(X) \subset \mathbb{R} \ni f(X) \in Conn$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש-
 $f(X) \ni \{קטעים\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל-0 ואת X_2 שולחת ל-1.

X_1, X_2 פתוחות ב- $X \Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש- $f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!



דוגמאות של קבוצות קמורות:

$$(1) \text{ כל מ"נ } (E, \|\cdot\|)$$

$$(2) \text{ כדורים } B_r(a), B_r[a] \subset E \text{ בתוך מ"נ.}$$

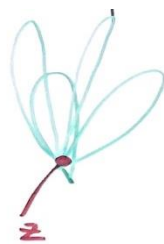
$$(3) \text{ מלבנים, תיבות, אליפסואידים, ...}$$

משפט (האלומות – תנאי מספיק לקשירות): נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$ כך ש:

$$\forall j \in J: Y_j \in Conn \quad (1)$$

$$\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset \quad (2)$$

$$X \in Conn \text{ אזי}$$



הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש- X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש-

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

$$\text{מתקיים} - \forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$$

כעת נשים לב ש- $Y_j \cap X_1$ ו- $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו- $z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j , אחרת היינו מקבלים ש- $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת – $X_2 = \bigcup_{j \in J} (X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X .

☺

תוצאות:

(1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, אזי $X \in Conn$.
(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

(2) שרשור

נניח $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: (1) מידי מהמשפט!

(2) נובע מ- (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב – $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

וברור – $A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש- $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$

☺

הערה (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y$ אם "אפשר לחבר x ל- y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש- $\{x, y\} \subset A$



טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

$$A_{x,x} = \{x\}, x \equiv x \quad (1)$$

$$A_{y,x} := A_{x,y}, x \equiv y \Rightarrow y \equiv x \quad (2)$$

$$x \equiv z \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \text{ - צ"ל - } \quad (3)$$

$$A_{x,z} := A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שרשור) נקבל ש- $A_{x,z} \in Conn$.

הגדרה: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] := \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x ".
נשים לב כי $X = \bigcup_{x \in X} [x]$

תכונות:

- $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ (יש חזרות! $[x] = [y]$ $\Leftrightarrow x \equiv y$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

תרגיל: הוכיחו ש T לא הומיאומורפי ל L (sans serif font).

הסבר: במרחב T יש נקודה z כך שלתת מרחב $T \setminus \{z\}$ יש 3 מרכיבי קשירות.

אבל לכל $a \in L$ לתת מרחב $L \setminus \{a\}$ יש לכל היותר 2 מרכיבי קשירות.

- X קשיר \Leftrightarrow יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x] =$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x .

- $[x]$ סגור ב X .

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

תרגיל: נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

$$X = (0, 2) \cup (2, 5) \cup \{7\} \text{ א.}$$

תשובה: $[1] = (0, 2), [3] = (2, 5), [7] = \{7\}$

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{R} \text{ ב.}$$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא "לא קשיר לחלוטין" (*totally disconnected*) אם

$$[x] = \{x\} \text{ לכל } x \in X \text{ (רק נקודות תת קבוצה קשירה).}$$

דוגמאות:

(1) מרחבים דיסקרטיים.

$$\mathbb{Q} \quad (2)$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$(\mathbb{Z}, d_p) \quad * \quad (4)$$

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגורה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

(5) * (\mathbb{R}, τ_s) (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה \mathbb{R} מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x + \varepsilon) \subseteq O\}$$

הגדרה: (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[x]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x \equiv_p y \stackrel{def}{=} \text{קיימת ב } X \text{ מסילה מ } x \text{ ל } y$$

טענה: \equiv_p יחס שקילות.

הסבר:

(1) צ"ל - $x \equiv_p x$. ניקח מסילה קבועה.

(2) צ"ל - $x \equiv_p y \Leftrightarrow y \equiv_p x$. עבור מסילה - $f: [0,1] \rightarrow X$

נגדיר "מסילה הפוכה" - $f^*: [0,1] \rightarrow X$ $f^*(t) = f(1-t)$

$$(3) \text{ צ"ל - } x \equiv_p z \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_p y \\ y \equiv_p z \end{cases}$$

$$\text{עבור - } \begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ נגדיר } f_3: [0,1] \rightarrow X \text{ כך ש -}$$

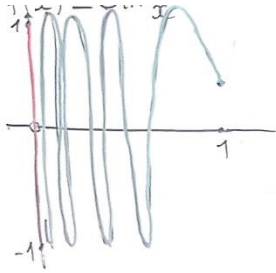
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש - f_3 רציפה מהתרגיל הבא:

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $f: X \rightarrow Z$ כך ש הצמצומים $f|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow Z, f|_{Y_2}: Y_2 \rightarrow Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



הערה: $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $f: (0,1] \rightarrow [-1,1]$ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

נגדיר $X := (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

נעת, $(0,1] \simeq Gr(f)$ קשיר ו- $Gr(f)$ צפוף ב- X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

תרגיל: (לעתידי) לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

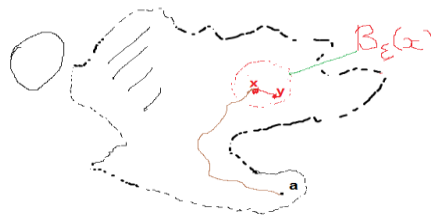
בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

תרגיל: כל קבוצה קשירה ופתוחה O במרחב נורמי E היא קשירה מסילתית.

הסבר: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O .

אז A פתוחה. כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב- $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



הגדרה: X נקרא קשיר מקומית בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $U \supseteq V \in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: קשיר מקומית אם זה מתקיים בכל נקודה.

תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. ** תנו דוגמה של תת מרחב ב \mathbb{R}^2 שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

קישורים מומלצים:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism>

https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^\cup := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
 - $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)
- תמיד: $\emptyset \in \gamma^{\cap F} \quad \emptyset \in \gamma^\cup \quad \gamma \subseteq \gamma^\cup \quad \gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$
 למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:
 $\tau^\cup = \tau \quad (t_3) \quad \tau^{\cap F} = \tau \quad (t_2) \quad \emptyset, X \in \tau \quad (t_1)$

הגדרה: (בסיס *basis*) יהי (X, τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל

קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ γ .

הערה: (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ .

2. $\gamma^\cup = \tau$.

3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

הגדרה: אומרים ש (X, τ) בעל תכונת מנייה שנייה (*second countable*) ונסמן:

$$(X, \tau) \in B_2$$

אם קיים בסיס γ בן מנייה.

דוגמאות: (תשתמשו בהגדרה (3))

• ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.

• ב $X = \mathbb{R}^2$

א. $\gamma_0 = \{\text{עיגולים פתוחים}\}$

ב. $\gamma_1 = \{(a, b) \times (c, d)\} = \{\text{מלבנים פתוחים}\}$

ג. $\gamma_2 = \{\text{ריבועים פתוחים}\}$ $\gamma_3 = \{\text{משולשים פתוחים}\}$

ד. $\gamma_4 = \{\text{עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}\}$

• $\mathbb{R}^n \in B_2$

$\gamma_4 = \{\frac{1}{k} \text{ כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים בן מניה !}\}$

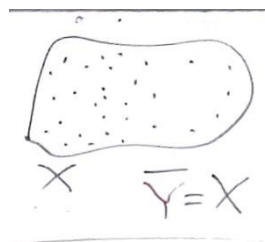
• לכל (X, d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{\substack{a \in X \\ r > 0}}$ $\gamma^\cup = top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם $\gamma_1 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{\substack{a \in X \\ n \in \mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

טענה: לכל (X, d) ולכל $\bar{Y} = X$ (כלומר Y צפוף ב X) $\gamma_2 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{\substack{a \in Y \\ n \in \mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל

$top(d)$



(X, d) הוא ספרבילי אז הוא גם

תוצאה חשובה: אם מרחב מטרי

B_2

$$(X, d) \in B_2 \Leftrightarrow (X, d) \in Sep$$

טענה: הוכיחו ש B_2 תכונה תורשתית.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X, τ) ו $Z \subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G \cap Z \mid G \in \gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z, τ_Z) .

טענה: לכל מרחב דיסקרטי (X, τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x \in X\}$ הוא בסיס ל (X, τ_{discr}) . לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0 \subseteq \gamma$.
 הסיקו: $(X, \tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$.
 למשל: $(\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2$

הרצאה 8

משפט: $B_2 \subset Sep$.

הוכחה: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X, τ) . צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\emptyset \neq \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$ אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X . אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_{G_a} \in G_a$ לכן $y_{G_a} \in Y_\gamma \cap O \neq \emptyset$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ . ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

תוצאה 1: $B_2 \cap Metrizable = Sep \cap Metrizable$.

תוצאה 2: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

טענה: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \hookrightarrow (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)$ לא ספרבילי
 תת מרחב מטרי סדרות בינאריות

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

הערה 1: $B_2 \neq Sep$.

נוכיח בהמשך שקו סורגנפראי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$, $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

הערה 2: ספרביליות לא תורשתית (גם במרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

טענה: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X . התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.

2. א. $X \in \gamma^\cup$.

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ .

הערה: ב שקול ל ב* : $\forall A, B \in \gamma \forall x \in A \cap B \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב** : $\gamma^{\cap F} \subseteq \gamma^\cup$.

הוכחה: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^\cup$. מ"ל τ טופולוגיה.

$\emptyset, X \in \tau$ (t₁)

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\emptyset \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על γ^\cup .

$\tau^{\cap F} = \tau$ (t₂)

הסבר: $\tau^{\cap F} = (\gamma^\cup)^{\cap F} = (\gamma^{\cap F})^\cup \subseteq (\gamma^\cup)^\cup = \gamma^\cup = \tau$.

$\tau^\cup = \tau$ (t₃)

הסבר: $\tau^\cup = (\gamma^\cup)^\cup = \gamma^\cup = \tau$.

☺

בסיס מקומי

הגדרה: נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a , אם לכל $U \in N(a)$

קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X, τ) בעל תכונת מנייה ראשונה, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$

אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X, d) – דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a –

$$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$$

$$\beta_3 := \{B[a, \frac{1}{n}]: n \in \mathbb{N}\} \quad ! \quad \beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X, \tau_{discr}) \in B_1$.

הסבר: לכל $a \in (X, \tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

הערה:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

תרגיל: B_1 תכומה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X, τ) . לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a .

דוגמה: $B_2 \neq B_1$ $\begin{cases} (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2 \end{cases}$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\dim(X) = 0 \stackrel{def}{=} \text{קיים בסיס } \gamma \text{ לטופולוגיה כך שכל } A \in \gamma \text{ קבוצה סגורה.}$

הגדרה: אומרים ש $\dim X \leq 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) = 0 \quad \forall A \in \gamma$.

אומרים ש $\dim X \leq n + 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \leq n \quad \forall A \in \gamma$.

דוגמאות: ... $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$

$\gamma := \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגורות.

ג. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ קבוצה סגורה ב- \mathbb{Q} לכל $a, b \in \mathbb{Q}^c$

ד. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$

ה. Sorgenfrey line $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$

תזכורת: $O \in \tau_s \stackrel{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists \epsilon = \epsilon_x > 0: [x, x + \epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי:

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$

א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$

הסבר: א. $[0, 1) \in \tau_s, [0, 1) \notin \tau$

ב. מ"ל שבסיס של טופולוגיה טבעית τ מוכל ב- τ_s .

$(a, b) = \cup \{[x, x + \epsilon_x) \mid x \in (a, b)\} \in \tau_s$

• $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$

הסבר: $\gamma := \{[a, b) : a < b\} \subset \tau_s$ בסיס שמורכב מקבוצות סגורות.

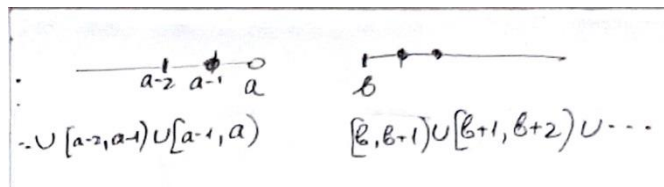
$O = \cup_{x \in O} [x, x + \epsilon_x)$

• טענת עזר: כל $[a, b)$ סגורה -

א) $[a, b) \in \tau_s$ ברור (כלומר פתוחה לפי ההגדרה).

ב) $[a, b)$ גם סגורה כי $(-\infty, a) \cup [b, \infty) = \mathbb{R} \setminus [a, b)$ פתוחה.

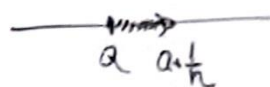
$x \in \cup_{x \in O} [x, x + \epsilon_x)$



• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$

הסבר: רציונליים \mathbb{Q} קבוצה צפופה גם בטופולוגית τ_s כי $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$



הסבר:

$\alpha := \{U_n := [a, a + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset N_{\tau_s}(a)$

בסיס מקומי בן מנייה בנקודה $a \in \mathbb{R}$.

• טענה: $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma \supset \tau_s$ כך ש γ בן מנייה.

$[x, x+1) \in \tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ .

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש $x \in A_x \subset [x, x+1)$

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $\mathbb{R} \rightarrow \gamma \quad x \mapsto A_x$

φ חח"ע ($x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y$).

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן $|\gamma| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, לכן γ לא בת מנייה!

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$

הסבר: נובע מהטענה הבאה:

משפט: אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז $X \in T_{3\frac{1}{2}}$

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B .

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס קיימת קבוצה סגורה O כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}, f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ - סגורה אזי -}$$

רציפה! (4 מקרים ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B .

☺

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin Metr$

הסבר: $Metr \cap Sep \subset B_2$. אבל $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$ אבל $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

תרגיל: הוכיחו שאם $\dim X = 0, X \in T_2$ אז X לא קשיר לחלוטין.

קשר בין עקרון Heine ותכונת B_1

הגדרה: אומרים שמ"ט הוא בעל תכונת FU (Frechet – Urysohn) אם:

$$\forall A \subseteq X: scl(A) = cl(A)$$

הערה: $Metriz \subset B_1 \subset FU$

הערה: למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא FU .

טענה: $B_1 \subseteq FU$

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ מונוטוני ("ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ

משפט (עיקרון Heine מתוקן): נניח $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש- $(X, \tau) \in FU$ (למשל: $(X, \tau) \in B_1$) אין הגבלה על Y . אז התנאים הבאים שקולים:

(א) f רציפה.

(ב) f שומרת על התכנסות.

הוכחה: (1) \Leftrightarrow (2) תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ היינה).

(2) \Leftrightarrow (1): (מקוצרת)

$$f(cl(A)) \stackrel{\text{תמיד מתקיים}}{\subseteq} f(scl(A)) \stackrel{\text{הראנו}}{\subseteq} scl(f(A)) \stackrel{\text{תמיד מתקיים}}{\subseteq} cl(f(A))$$

☺

תוצאה: עיקרון Heine תמיד נכון למשל עבור קו Sorgenfrey- $(\mathbb{R}, \tau_s) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$

כי $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1 \subset FU$.

הערה: בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

(M, \leq) קבוצה סדורה חלקית מכוונת (לכל $\forall a, b \in M \exists c \in M a \leq c, b \leq c$).

סדרה מוכללת או רשת (*generalized sequences or net*) היא פונקציה $(M, \leq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N}, \leq) \xrightarrow{f} X$).

דוגמה חשובה: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V \in \beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $\lim\{x_V : V \in \beta\} = a$

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$$z \in cl(A) \Leftrightarrow z \text{ גבול של סדרה מוכללת}$$

ואז יש הכללת עיקרון Heine ...

שימו לב: למשל אינטגרלים זה סוג של גבול דרך רשתות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

(subbase) Pre-base

הגדרה: נניח (X, τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא פרא-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$$(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau \quad \text{שקול:} \quad \tau \text{ הוא בסיס ל-} \alpha^{\cap F}$$

דוגמאות:

(1) כל בסיס הוא פרא-בסיס.

(2) $X = \mathbb{R}$ $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$)

$$\alpha \text{ פרא-בסיס אבל לא בסיס! } \alpha^{\cap F} \subset \alpha^{\cap 2} \subset \alpha^{\cap F} \text{ בסיס ל-} \mathbb{R}$$

הגדרה: לכל קבוצה סדורה לינארית (X, \leq) אפשר להגדיר "interval topology" τ_{\leq}

$$\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} \quad \alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in X\}$$

$$X = \mathbb{R}^2 \quad \alpha = \{(a, b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c, d)\}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (או $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

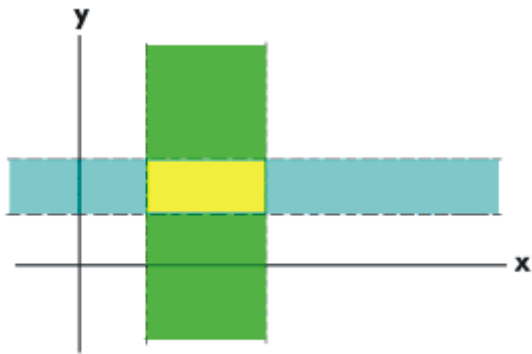


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \rightarrow Y$

$\alpha \subset \tau_Y$ פרא-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. רציפה f .
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

(1) \Leftarrow (2): בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

(2) \Leftarrow (1): צ"ל $f^{-1}(O) \in \tau_X$ $\forall O \in \tau_Y$.

מצד שני, α תת בסיס ל- τ_Y , לכן $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על \cap_F וגם על \cup .



תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

1. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

הסבר: דוגמה 2 + הטענה.



טענה: נניח $\alpha \subset P(X)$ כן ש- α כיסוי ל- X . אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

הסבר:

(t_1) $\emptyset \in \tau, X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש- α כיסוי).

(t_2) $\tau^{\cap F} = ((\alpha^{\cap F})^{\cup})^{\cap F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap F})^{\cap F} = (\alpha^{\cup})^{\cap F} = \tau$

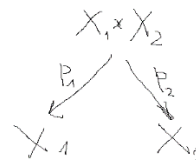
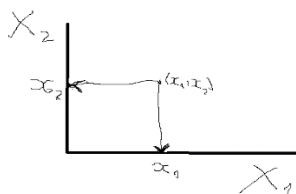
(t_3) $\tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$



מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$(X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?)$ $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i$



כללי יותר: על $\tau_{\Pi} = ?$ $X = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$

רעיון: מגדירים טופולוגיית מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_k : \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \rightarrow X_k \quad p_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

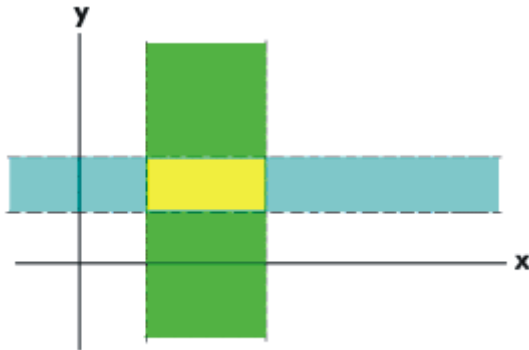


Fig. 2

$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

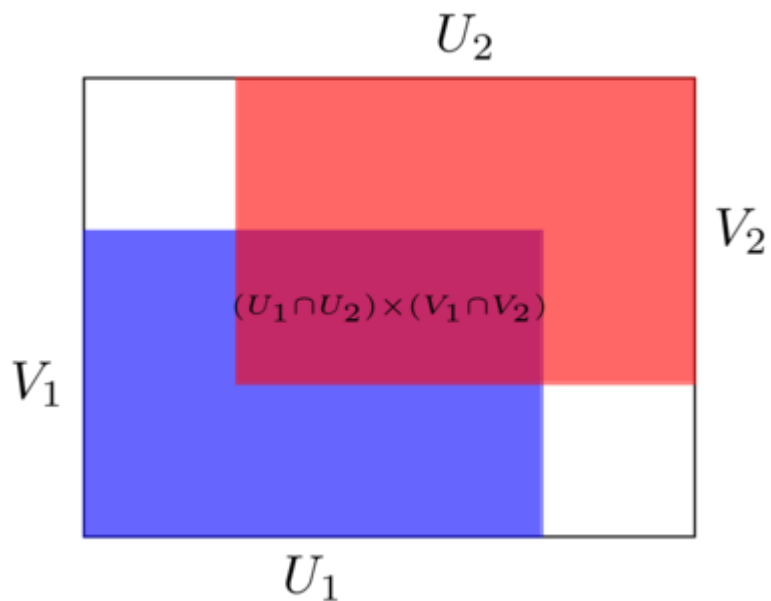
$O_1 \times O_2, X_1 \times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

"מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ (במקרה של $n = 2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap F} = \gamma, X \in \gamma$



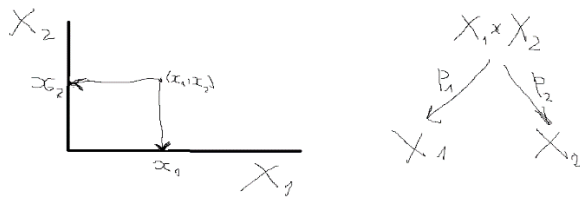
$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

הרצאה 9

מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

על $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$(X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?) \quad X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i$$



יותר כללי: על $X = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$ $\tau_{\Pi} = ?$

רעיון: מגדירים טופולוגיה מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_k : \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \rightarrow X_k \quad p_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

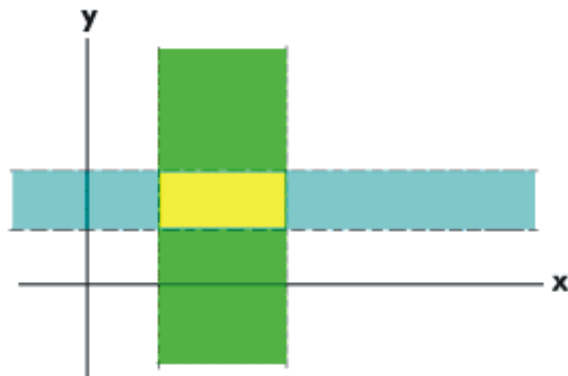


Fig. 2

$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

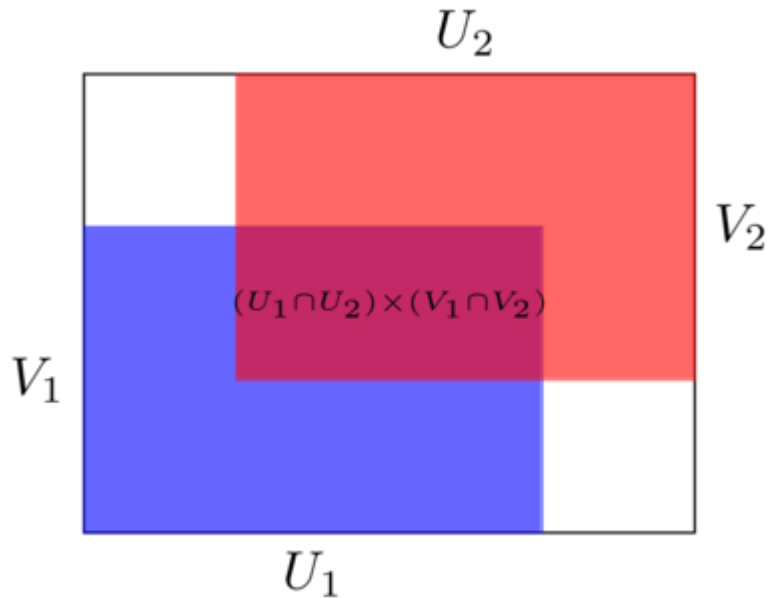
$X_1 \times X_2, O_1 \times X_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) – $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

"מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ (במקרה של $n = 2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^F = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן γ בסיס לטופולוגיה מסוימת γ^\cup . נגדיר

$$\tau_\Pi = \gamma^\cup$$

ז"א "קבוצה פתוחה" במכפלה טופולוגית = איחוד של תיבות בסיסיות.

שקול: $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathcal{N}(x_i) \quad O_1 \times \dots \times O_n \subseteq O$

משפט: $X = (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_\Pi = \gamma^\cup$.

פרא-בסיס סטנדרטי $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות". אז

$$\alpha^{\cap F} = \gamma \quad \tau_\Pi = (\alpha^{\cap F})^\cup$$

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1 = \text{Cylinder}$	
$S^1 \times S^1 = \text{Torus}$	

טורוס n -ממדי $S_1^n = S_1 \times \dots \times S_1 \approx T^n$

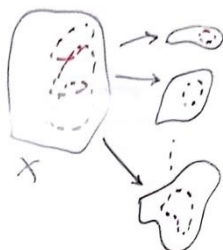
הוא בעל מימד n קומפקטי (לכן לא הומואומורפי ל \mathbb{R}^n) אבל לכל נקודה יש סביבה

שהומואומורפי ל \mathbb{R}^n (ז"א T^n לוקלית הומואומורפי ל \mathbb{R}^n).

מ"ל עבור $n = 1$ (מדוע?)

הגדרה: טופולוגיה חלשה (Weak Topology).

נניח X קבוצה. $(X_i, \tau_i) \in TOP$, $i \in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $f_i: X \rightarrow X_i$



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש –

א. $(X, \tau_w) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות.

ב. בהינתן ש – טופולוגיה מסוימת על X ש –

$(X, \sigma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות מתקיים – $\sigma \supseteq \tau_w$

(ז"א τ_w היא הכי חלשה כך שמתקיים א').

τ_w נקראת "טופולוגיה חלשה". הגדרה פורמלית:

$$\tau_w = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

כאשר $\alpha := \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i, i \in I\}$

לפי הבנייה α פרא-בסיס ל – τ_w ו – $\alpha^{\cap F}$ בסיס ל – τ_w .

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב, טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

משפט: (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y, σ) מ"ט ונתונה פונקציה $g: Y \rightarrow X$

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי – $X \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)_{i \in I}$

אזי $Y \xrightarrow{g} (X, \tau_w) \Leftrightarrow Y \xrightarrow{f_i \circ g} (X_i, \tau_i)_{i \in I}$ רציפה.

הוכחה:

(\Rightarrow) : ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

(\Leftarrow) :

צ"ל $Y \xrightarrow{g} (X, \tau_w)$ רציפה.

ש"ל $\forall O \in \tau_w: g^{-1}(O) \in \sigma$

מ"ל (על פרא-בסיס α). ז"א כאשר –

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

תוצאה: τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

הסבר: זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X, \tau_w) \xrightarrow{g=id} Y = X$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

- תת מרחב טופולוגי:

$$(Y, ?) \xrightarrow[\text{שיכון}]{i} (X, \tau) \quad (Y \text{ תת קבוצה של } X)$$

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגיה תת מרחב (שכבר הגדרנו!).

$$\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y \quad \text{שימו לב:}$$

- מכפלה טופולוגית של n גורמים $(X_i, \tau_i) \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$$X = \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\prod} \right) \quad \text{מ"ט } \tau_{\prod} \text{ הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות}$$

$$p_i: \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\prod} \right) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$$\tau_{\prod} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} \quad \text{מתקיים } \tau_w = \tau_{\prod} \text{ טופולוגיה מכפלה כפי שהגדרנו!}$$

כאשר $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- הגדרה: מכפלה טופולוגית (אין הגבלה) של $(X_i, \tau_i) \quad i \in I$

$$X = \left\{ I \xrightarrow{x} \bigcup_{i \in I} X_i, x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_i} (X_i, \tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x = (x_i)_{i \in I}$ (פונקציות)

היטלים: $p_{i_0}(x) = x(i_0) = x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w = \tau_{\Pi} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$ טופולוגיה חלשה (טופולוגית Tychonoff).

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי "תיבות אלמנטריות".

$$\gamma := \alpha^{\cap F} = \{\text{תיבות בסיסיות}\} = \{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \tau_j\}$$

בסיס סטנדרטי.

הערות:

$$p_i^{-1}(O_i) = O_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j \quad \text{א.}$$

$$p_i^{-1}(O_i) \cap p_k^{-1}(O_k) = O_i \times O_k \times \prod_{j \in I \setminus \{i,k\}} X_j \quad \text{ב.}$$

$$p_k(\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_i)) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$O \in \tau_{\Pi} \Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} \in O \Rightarrow \exists \text{ finite } J \subseteq I \exists O_j \in \tau_j \quad x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j) \subseteq O \quad \text{ד.}$$

$$\text{שימו לב: תנאי } x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j) \text{ שקול ל } \forall j \in J \quad x_j \in O_j$$

• טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:

א. תזכורת: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho) = \{\rho\}^{\cup} = \{B_{\rho}(x, r) \mid x \in X, r > 0\}^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i \in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X .

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i \in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזרות:

$$\left\{ X \xrightarrow{id} (X, top(\rho_i)) \right\} \quad (\forall i: f_i = id \text{ א"ז})$$

$$\tau_w = (\alpha^{\cap F})^{\cup} \quad \text{לכן -}$$

$$\alpha := \{B_{\rho_i}(x, r) \mid x \in X, r > 0, i \in I\} \quad \text{כאשר -}$$

"כדורים" פרא-בסיס ל- τ_w .

• טופולוגיה נקודתית על $X = C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t \in [0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1, f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}$$

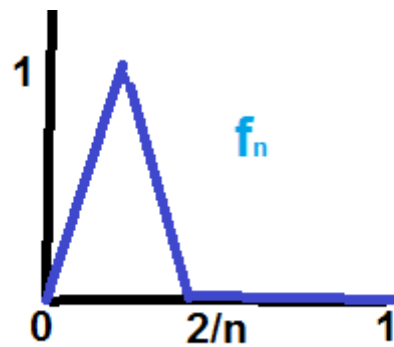
↓

$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית (pointwise topology).

הערה: $(C[a, b], \tau_p) \not\subseteq top(d_{max})$ לא מטריזבילית (אבל חשובה באנליזה).

$\tau_p \neq top(d_{max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n}) = 1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס אבל לא בטופולוגיה $top(d_{max})$.

• טופולוגיה p -אדית: $n \in \mathbb{N}$ $top(d_p) = \tau_w \left\{ \mathbb{Z} \xrightarrow{f_n} \mathbb{Z}_{p^n, disc} \right\}$

בעצם פונקצית האלכסון $f = \Delta_{n \in \mathbb{N}} f_n : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ מגדיר שיכון טופולוגי.

$\mathbb{Z}_{p^n} = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

הגדרה: $f : X \rightarrow Y$ נקרה שיכון טופולוגי אם פונקציה מושרת $f : X \rightarrow f(X)$ הומיאומורפיזם.

טענה: נניח $f_i : Y_i \rightarrow X_i$ פונקציות רציפות $\forall i \in I$.

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f := \prod_{i \in I} f_i$ הבאה היא רציפה

$$f : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad f((y_i)_{i \in I}) = (f_i(y_i))_{i \in I}$$

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $Y := \prod_{i \in I} Y_i, X = \prod_{i \in I} X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^Y, p_i^X . אז יש לנו פונקציה $f : Y \rightarrow X$ כך ש $p_i^X \circ f = f_i \circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפות. לכן גם $f_i \circ p_i^Y$ שווה ל $p_i^X \circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

תוצאה: אם כל גורם $f_i : Y_i \rightarrow X_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f : Y \rightarrow X$.

$$Y_i \simeq X_i \Rightarrow \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} Y_i \simeq \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$$

דוגמה: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z} \simeq (-1, 1) \times (0, 7) \times (5, \infty) \times \mathbb{N}^2$

תרגיל: $S_2 \setminus \{z\} \simeq (0, 1) \times (2, 4)$

הסבר: $\forall z \in S_2 \quad S_2 \setminus \{z\} \simeq \mathbb{R}^2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2 \simeq (0, 1) \times (2, 4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R} \simeq (a, b)$.

תרגיל: $X \times Y \simeq Y \times X$ (נסו להוכיח וגם להכליל).

משפט: נניח $f_i : Y \rightarrow X_i$ פונקציות רציפות.

הוכיחו "שפונקציית האלכסון" $f := \Delta_{i \in I} f_i$ הבאה רציפה

$$f : Y \rightarrow X = \left(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{\prod} \right) \quad f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$$

רציפה ומתקיים $\forall k \in I \quad f_k = p_k \circ f$

הוכחה: $\forall y \in Y \quad (p_k \circ f)(y) = p_k(f(y)) = p_k(f_i(y))_{i \in I} = f_k(y)$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k = p_k \circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

דוגמה: $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f_1(t) = \cos t \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f_2(t) = \sin t$

$$f = f_1 \Delta f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1], f(t) = (\cos t, \sin t) \quad f(\mathbb{R}) = S_1$$

משפט: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $p_i : (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ היא פונקציה פתוחה.

הוכחה: צ"ל $\forall O \in \tau_\Pi \quad p_k(O) \in \tau_k$

אם $O \in \gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J \subseteq I \quad O = \bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)$$

$$p_k(O) = p_k\left(\bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)\right) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases} \quad \text{נשתמש בשוויון}$$

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O \in \gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל τ_Π ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

הערה: הטלות בד"כ לא פונקציות סגורות. למשל $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ לא סגורה כי

$$A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \text{ סגורה ב } \mathbb{R}^2 \text{ אבל } p_1(A) = (0, \infty) \text{ לא סגורה ב } \mathbb{R}.$$

הרצאה 10

אזהרה: מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ לא פתוחה ב } \left(\frac{1}{2}, 3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \dots$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ לא פתוחה ב } (a, b)^{\mathbb{N}}$$

$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \quad \text{הסבר:}$$

$$(X_n, \tau_n) = \mathbb{R} \quad I = \mathbb{N}$$

אם נניח בשלילה ש $(a, b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז $(a, b)^{\mathbb{N}} \in \tau_\pi = \gamma^U$ לכן

$$\leftarrow (a, b)^{\mathbb{N}} \text{ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.}$$

לכן הוא מכיל $\dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times O_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \supseteq O_1 \times O_2 \times \dots \times O_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$

אבל זה גורר $(a, b) \supseteq \mathbb{R}$, סתירה!

שענה שימושית: במכפלה סופית אם \mathcal{Y}_i בסיס ל τ_i אז $\mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_n$ בסיס ל τ_{\prod} .

עבור מכפלה אינסופית: $\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid J \subseteq I, O_j \in \mathcal{Y}_j \}$ סופי

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרת ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

• (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

... $(Tychonoff)$ (משפט $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט $Tychonoff$))

• (מכפלות סופיות ובנות מניה)

• $\dots, Sep, B_1, B_2, Metr, \dots$

• (מכפלות סופיות)

$LComp, discr$ (קומפקטיות מקומית)

הגדרה: מ"ט X הוא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$.

דוגמאות: מרחב דיסקרטי, \mathbb{R}^n , כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (סופית – כן!).

תרגיל: $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית

ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $U := U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$

לכן הטלה $\mathbb{R} = p_{m+1}(U) = p_{m+1}(V)$ עם תמונה רציפה \mathbb{R} (שהיא לא קומפקטית) ...

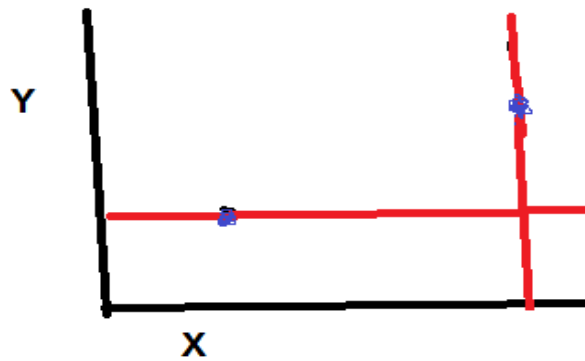
הערה: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית בת מנייה.

למשל $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור.

תרגיל: א. $X \times \{y\} \simeq X$ $\{x\} \times Y \simeq Y$.

ב. הוכיחו $X \times Y \in Conn \Leftrightarrow X, Y \in Conn$.

רמז: כדאי להיעזר ב (א) ובמשפט האלומות (השירשור).



הערה: מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\rightarrow \left(X_1, \frac{top(\rho_1)}{\tau_1} \right), \left(X_2, \frac{top(\rho_2)}{\tau_2} \right) \in TOP$$

טענה: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π - "מטריקת מכפלה".

(א) "מטריקה בסגנון אוקלידס" -

$$d(x, y) := \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}$$

$$d_1(x, y) := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \quad (ב)$$

$$d_{max}(x, y) := \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\} \quad (ג)$$

• תרגיל:

$$X := X_1 \times X_2 - \text{מ} \quad d \sim d_1 \sim d_{max} \quad (א)$$

$$\underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(א) \Rightarrow} = \tau_\pi \quad (ב)$$

טופולוגית מכפלה

מטריזציה במקרה של מכפלה בן מניה:

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \dots$$

$$d(x, y) := \sup \left\{ \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

אחת מהאפשרויות.

• תרגיל: לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

רמז: כדאי להשתמש בפונקציה ההטלה.

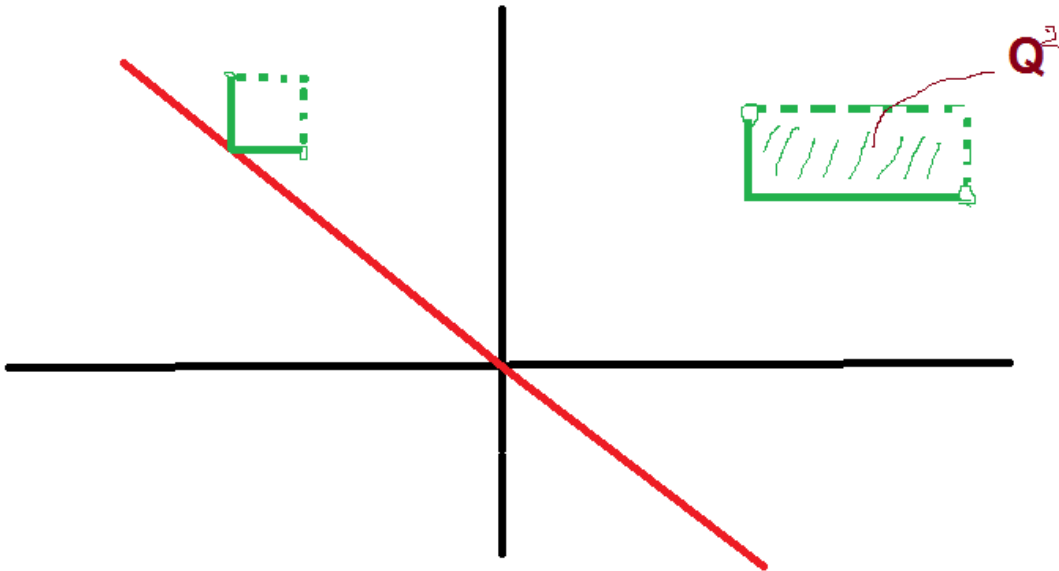
- תרגיל: הוכיחו $X \in T_2 \Leftrightarrow \Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \text{ סגור ב- } X \times X$.
- תרגיל*: הוכיחו שאם $f: X \rightarrow Y$ רציפה ו $Y \in T_2$ אז $Gr(f)$ סגור ב $X \times Y$

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים?

- תרגיל*: הוכיחו: $cl(\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} cl(A_i)$ לכל (X_i, τ_i) .
- תרגיל*: "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

$$\text{רמז: } \{[a, a + \varepsilon) \times [b, b + \delta) : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta > 0\}$$

בסיס למישור סורגנפראי



הגדרה: נניח (G, \cdot) חבורה ו (G, τ) מ"ט.

אומרים ש $(G, \cdot, \tau) \in TGr$ - חבורה טופולוגית (*Topological Group*) אם מתקיים:

א. "כפל" $G \times G \rightarrow G \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a, b \in G \forall U \in N(ab) \exists V_1 \in N(a), V_2 \in N(b) \quad V_1 V_2 \subseteq U$

ב. "ההיפוך": $G \rightarrow G \quad a \mapsto a^{-1}$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a \in G \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$

תרגיל: לנסח בעזרת סדרות מתכנסות אם G מטריזבילי (או B_1).

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E, +, \tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z}, +, \tau_p)$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת של TGr - (א) \neq (ב).

למשל $(\mathbb{R}, +, \tau_s)$ בטופולוגית סורגנפראי.

תזכורת: $\mathbb{R} \ni 0 \in \tau_s \stackrel{def}{=} \forall x \in O \exists \epsilon > 0: [x, x + \epsilon) \subseteq O$

למשל $- \tau_s \ni [0, 1)$ פתוחה אבל לא $[-1, 0]$ (שהוא מקור של $[0, 1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0$ but $\lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$

תרגיל: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית היא הומוגנית.

לסקרנים:

- (על חבורות טופולוגיות)

באתר <http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html> ראו קבצים :

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/IntroTopGr.pdf>

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrNotes070217.pdf>

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrEx.pdf>

- (על מכפלה טופולוגית) https://en.wikipedia.org/wiki/Product_topology

קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

(תזכורת): מרחב טופולוגי הוא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

תכונות ודוגמאות:

- כל מרחב סופי הוא קומפקטי.
- $Comp \ni (X, \tau_{cofinite})$

הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט אולי למספר סופי של נקודות.

$X \text{ is finite} \Leftrightarrow (X, \tau_{discr}) \in \text{Comp}$ •

הסבר: $\{x\}: x \in X$ כיסוי פתוח של X .

• הגדרה: תת קבוצה Y במרחב X נקראת קומפקטית אם $(Y, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית): התנאים הבאים שקולים:

(א) Y תת קבוצה קומפקטית ב X .

(ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות ב X שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$) קיים תת אוסף סופי $\{O_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$).

הסבר: נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

• איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

תרגיל: תת קבוצות $Q, Q \cap [0,1]$ לא קומפקטיות. (רמז: משפט Heine-Borel)

תרגיל: $Y = [0,1]$ בקו סורגנפראי (\mathbb{R}, τ_s) לא קומפקטי.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y . כיסוי $\alpha := \bigcup_{n \geq 2} [0, \frac{n-1}{n}] \cup \{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי.

• משפט: אם (X, d) מ"מ קומפקטי (ז"א $(X, top(d)) \in \text{Comp}$) אזי

א. (X, d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in \text{Sep}$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: א תזכורת: לכל ε -כיסוי $\{B(x, \varepsilon): x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε -צפוף ב (X, d) אז $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. טענת: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A) = X$) בת מניה A ב X . בגלל המטריזביליות $.scl(A) = cl(A)$. לכן נקבל $.scl(A) = X$.

לכל איבר $x \in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש $x = \lim a_n$, $a_n \in A$. נגדיר פונקציה

$$\sigma: X \rightarrow P(A) \quad \sigma(x) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$$

זאת פונקציה **חה"ע**. לכן $card(X) = card(\sigma(X)) \leq card P(A) \leq 2^{\aleph_0} = card \mathbb{R}$

■

הערה: אפשר להוכיח את החסימות ישר כך:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(z) \quad \text{אז } z \in X$$

כיסוי פתוח. יש תת כיסוי סופי ואז $X = B_{n_0}(z)$ לכן

$$diam X \leq 2n_0$$

• **הערה:** קומפקטיות לא תורשתית – $(0,1) \subset [0,1]$
 $\notin Comp \quad \in Comp$
 $(\alpha := \{(\frac{1}{n}, 1) : n \in \mathbb{N}\})$ כיסוי פתוח "בעייתי" של $(0,1)$

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות סגורות.

משפט: נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.

הוכחה:



נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב X – כך ש $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

הרעיון: להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^* = \alpha \cup \{Y^c\}$. הוא בעצם כיסוי פתוח של X .

$X \in Comp \Leftrightarrow$ קיים תת כיסוי סופי $\gamma \supseteq \alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y . לכן נקבל תת אוסף סופי α (ולא ל α^*) שמכסה את Y . אז $Y \in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

משפט: תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

הוכחה: $X \in Comp$ רציפה ועל $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Comp$.

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של Y . צ"ל – קיים כיסוי סופי.

$$\Leftarrow Y = \bigcup_{i \in I} O_i$$

$$X = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$$

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש- f רציפה).

$X \in \text{Comp} \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי ל- $\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש-

$$X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$$

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j \in J} O_j \quad \text{אז מכאן -}$$

(תמיד $f f^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $f f^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j \in J}$ ל- α .

■

תרגיל: נניח $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a, b]) = [c, d]$.

משפט (ההפרדה): נניח $A, B, X \in T_2$, תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



הוכחה:

מקרה א' - $A = \{a\}$

הערה: קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B \exists U_b \in N(a) \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו- V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X .

בגלל קריטריון (3) \Leftarrow קיים תת כיסוי סופי -

$$\exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \stackrel{\text{נסמן}}{=} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B . נגדיר בהתאמה -

$$N(a) \ni U := \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}$$

מ - (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a . כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

↓

$$\left(\bigcap_{i=1}^n U_{b_i} \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \right) = \emptyset$$

↓

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

מקרה ב' (כללי) -

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A \exists U_a \in N(a) \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X .

$$X \supseteq A \in \text{Comp}$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U := \bigcup_{i=1}^m U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר - $N(B) \ni V := \bigcap_{i=1}^m V_{a_i} \supseteq B$ פתוח בגלל - (t_2) .

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

↓

$$\left(\bigcup_{i=1}^m U_{a_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m V_{a_i} \right) = \emptyset$$

↓

$$U \cap V = \emptyset$$

■

• משפט (הסגירות): נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב - X .

הוכחה:

ניקה $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.



משפט (הנורמליות):

$$X \in T_4 \iff \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$$

הוכחה: $A, B \in Comp$ תת קבוצות סגורות וזרות. A, B

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.



משפט: נניח $f: X \rightarrow Y, Y \in T_2, X \in Comp$ אזי פונקציה סגורה.

הוכחה:

צ"ל $f(A)$ סגורה ב- Y לכל A סגורה ב- X .

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט – תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם) –

$$T_2 \ni Y \ni f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).



משפט (הכללת משפט וירשטראס): נניח $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \in Comp$ אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

הוכחה:

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן – $\mathbb{R} \supseteq f(X) \in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב- \mathbb{R} , אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R} \ni B := \sup\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R} \ni A := \inf\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X) = \overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B = \text{Max } f$$

$$A = \text{Min } f$$

■

תרגילים:

(1) נניח (X, d) מ"מ, $A, K \subseteq X$ לא ריקות, $K \in \text{Comp}$. אזי:

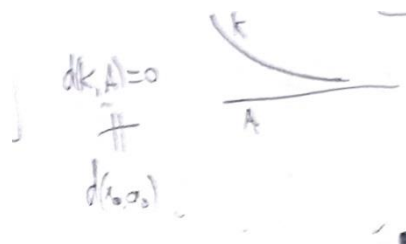
$$\boxed{d(K, A) = d(x_0, A)} \quad \text{א} \quad \text{קיימת נקודה } x_0 \in K \text{ כך ש-}$$

רמז: פונקציית המרחק...

$$\text{ב) אם גם } A \in \text{Comp}, \text{ אז } \exists a_0 \in A, \exists x_0 \in K: \boxed{d(K, A) = d(x_0, a_0)}$$

דוגמה נגדית (אפילו לקבוצות סגורות):

ב - \mathbb{R}^2 :



$$\text{ב - } \mathbb{R}: \quad B = \underbrace{\left\{n + \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}}_{\text{סגורות}}, A = \mathbb{N}$$

$$0 = d(A, B) \neq d(a_0, b_0) \quad (\text{לכן } \inf \text{ לא מתקבל!})$$

11 הרצאה

משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):

נניח $f: X \rightarrow Y, Y \in T_2, X \in \text{Comp}$ רציפה ו"חח"ע. אזי שיכון טופולוגי

(ז"א $f: X \rightarrow f(X)$ הומיאומורפיזם).

הוכחה: מ"ל את המשפט בהנחה ש- f על. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו- (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

$$(3) \text{ רציפות של ההופכי } - X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

הערה: א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f על אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

תוצאה: נניח $(X, \tau) \in \text{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (Hausdorff) כך ש $\sigma \subseteq \tau$ אז $\sigma = \tau$.

הגדרה: נניח $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X .

א) $\alpha \in \text{FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ סופית.

ב) $\alpha \in \text{IP}$ אם $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב \Leftarrow א).

דוגמה: כל סדרה $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$\alpha = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{FIP} \setminus \text{IP}$

משפט (קריטריון של Comp): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) $X \in \text{Comp}$

(2) $\text{IP} \ni \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \text{FIP} \ni \alpha = \{A_i\}_{i \in I} \\ \forall i \in I: A_i \text{ סגורה} \end{cases}$

הוכחה:

שימו לב ש $\{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i \in I}$ (קבוצות סגורות) הוא לא IP.

$$\bigcup O_i = X \Leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי de Morgan והגדרת Comp...

■

דוגמה: $\mathbb{R} \notin \text{Comp}$ (דרך FIP).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

דוגמה: $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \text{Comp}$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \text{ סגור } A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \leq n\}$$

תזכורת: קריטריון *Cantor* לשלמות מאינפי:

התנאים הבאים שקולים:

(א) (X, d) מ"מ שלם.

(ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

של קבוצות סגורות כך ש $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ מתקיים -

$$\{c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$



משפט: כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

הסבר: (דרך קריטריון קנטור + קריטריון *FIP*)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

כך ש $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$

↓

$$\alpha \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

משפט (Heine – Borel):

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) $X \in \text{Comp}$

(2) X חסום וסגור.

הוכחה:

(1) \Leftrightarrow (2)

חסימות – כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

סגירות – $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

(1) \Rightarrow (2):

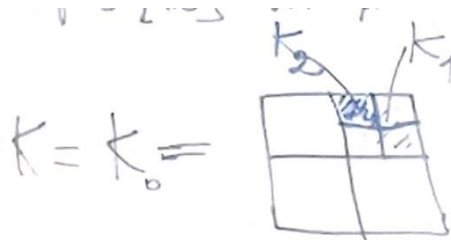
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $K \supset \mathbb{R}^n$ כך ש- $X \subseteq K$

דרך א': בה"כ $K = [a, b]^n$

אז לפי *Tychonoff*, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש- $[a, b] \in Comp$).

דרך ב' (Cantor):

נניח בשלילה ש- $Comp \not\subseteq K$.



תת כיסוי סופי.

ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא נחלק תתי קוביות (מספר $= 2^n$) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1 .

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \supset K_1$ כך ש- K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$\text{diam}(K_i) \rightarrow 0$$

\mathbb{R}^n שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי α O_j כך ש- $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_j$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_j של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

הערה: משפט *Heine – Borel* בד"כ לא נכון אם מחליפים \mathbb{R}^n במרחבים מטריים או נורמיים אחרים.

דוגמה: (כבר דיברנו על זה)

במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל: $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

משפט (קומפקטיות במרחב מטרי): נניח (X, d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

$$X = (X, top(d)) \in Comp \quad (1)$$

$$X \in SComp \quad (2) \quad (\text{לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת}).$$

$$X \in BW \quad (3) \quad (\text{תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה אינסופית ב- } X \text{ יש נקודת הצטברות}).$$

$$(X, d) \text{ שלם וחסום כליל.} \quad (4)$$

הוכחה:

$$(4) \leftarrow (1):$$

דומה למשפט Heine – Borel

(נדלג על הוכחה מפורשת)

$$(1) \leftarrow (2):$$

נניח בשלילה שלא, כלומר $X \notin SComp$

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ללא ת"ס מתכנסת ב- X .

$$\text{נגדיר } - \quad \emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

$$\text{ברור } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \quad \text{לכן } \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP$$

הערה: A_n סגורות. זה נובע מ- \dots

$$(1) \text{ במ"מ ידוע ש- } cl(A) = scl(A)$$

(2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש כמעט כל האיברים).

$$\text{כעת } - \quad \begin{cases} X \in Comp \\ FIP \ni \{A_n\} \end{cases} \Rightarrow \{A_n\} \in IP$$

$$\text{זה גורר שקיימת נקודה } c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$$

לכן קיימת תת סדרה קבועה c, c, \dots של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

$$(2) \leftarrow (3):$$

נניח $A \subseteq X$ אינסופית. צ"ל $A' \neq \emptyset$

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ב- A עם איברים שונים.

$X \in SComp \Leftrightarrow$ קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ שמתכנסת ב- X

$$a_{n_k} \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b$$

\Downarrow

$$b \in A'$$

\Downarrow

$$A' \neq \emptyset$$

$$:(2) \leftarrow (3)$$

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב X . נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר – $X \supset A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (תמונה של הסדרה).

אם A סופית אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A אינסופית אז לפי הנתון (3): $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב A ששואפת ל z .

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש תת סדרה של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

$$:(4) \leftarrow (2)$$

• קודם כל נוכיח שלמות של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) \Leftarrow יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב X .

תכונה m_3 של מרחבים מטריים \Leftarrow אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

• כעת נוכיח ש (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε – צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שאין ε_0 – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ – רשת ב (X, d)).

ניקח $x_2 \notin B_{\varepsilon_0}(x_1)$ אז מתקיים $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ – רשת ε_0 (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה x_1, x_2, x_3, \dots

$$\forall i \neq j: d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק.

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

נניח $X = \prod_{i \in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי קומפקטי אם ורק אם כל X_i הוא מרחב קומפקטי. הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה:

(כיוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה:

$$p_i : X \rightarrow X_i$$

(כיוון שני)

נוכיח בשתי דרכים:

- דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).
- דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

קריטריון קומפקטיות Alexander :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרא-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C \subset \beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

הוכחה של הקריטריון: (נדלג)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ותת בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.

בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי מכסימלי.

הערה: מכסימליות פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X

המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.

הסבר: על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.

שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתיים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.

בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:

(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C \cup \{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש

$$C_0 \cup \{O\} \text{ מכסה את } X$$

האוסף $C \cap \beta$ הוא לא מכסה את X

(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).

לכן קיימת נקודה $z \in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C \cap \beta$.

קיים $U \in C$ כך ש $z \in U$ (כי C כיסוי).

לפי הגדרת תת בסיס (β^F הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים

$$z \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subset U \text{ כך ש } S_1, \dots, S_n \in \beta$$

אף S_1, \dots, S_n לא שייך ל C (כי אחרת $C \cap \beta$ מכסה את z).
 לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1 \leq i \leq n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i \cup \{S_i\}$ מכסה את X .
 נסמן: $G_i := \cup\{A : A \in C_i\}$. אז $S_i \cup G_i = X$ ונקבל

$$U \cup \left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^n S_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) \supseteq \bigcap_{i=1}^n (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \{U\}$ של C מכסה את X . סתירה! זה מוכיח את הקריטריון.

בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט Tychonoff

בתפקיד של פרא-בסיס β ב $X = \prod_{i \in I} X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i . נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף α של C כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X . נציג אותו $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i . לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X . אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i .

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות פתוחות. לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i קיימת נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסה ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ לא מכוסה ע"י (כיסוי) C של X . סתירה! מכאן מש"ל.
 ☺

הערה:

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן). טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוויץ).

https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff%27s_theorem

https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space

תוצאות:

- $[0,1]^S \in Comp$ קובית Tychonoff (לכל קבוצה S)
- $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Comp$ קובית Hilbert
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \in Comp$ קובית Cantor

דוגמה (מרחב קנטור)

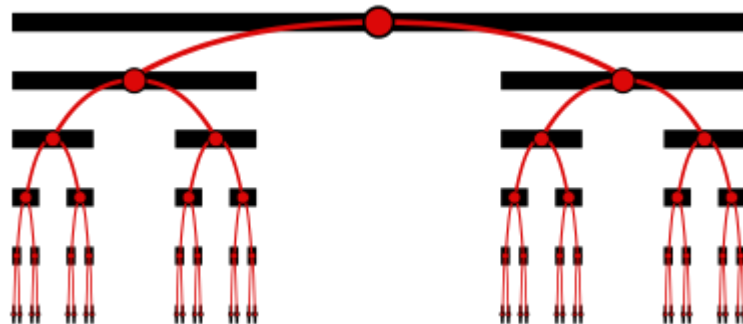
תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $C := \{c \in [0,1] : c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \quad c_i \in \{0,2\}\}$

היתוך של קבוצות סגורות $C = \bigcap_n C_n \quad C_0 = [0,1], C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$



משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$

הוכחה: ש"ל $C \simeq \{0,2\}^{\mathbb{N}}$.



נגדיר פונקציה $f : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C \quad f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). f גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה $a = (a_1, a_2, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה $O \in N(a)$ כך ש

$$x \in O \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

נבחר $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$ ונגדיר תיבה בסיסית

$$O := \{a_1\} \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \dots$$

אז ברור $O \in N(a)$ ולכל $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots) \in O$ מתקיים:

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$$

■

תרגיל: הוכיחו ש:

א. $C^2 \simeq C, C^n \simeq C, C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}} \simeq C$.

ב. * C הומוגני.

מידע נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere):

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $f: C \rightarrow [0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע?) $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ ($x_i \in \{0,2\}$)
- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור.
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים, <https://peerj.com/articles/cs-171.pdf> במערכות דינמיות סמבוליות ...
- "shift homeomorphism $\sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i) = (x_{i+1})$ (תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $\{\sigma^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ $G = \langle \sigma \rangle$)
- ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

הרצאה 12

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X . אומרים ש β עידון של α אם מתקיים –

$$\forall B \in \beta \exists A \in \alpha: B \subseteq A$$

נסמן: $\beta < \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: $\beta < \alpha$ אז $\beta \subseteq \alpha$.

דוגמה: $\forall 0 < r_1 < r_2 \quad \{B_{r_1}(x) : x \in X\} > \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$

הגדרה: נניח (X, d) מ"מ, α כיסוי פתוח של X . אומרים ש α הוא δ -אחיד

אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} < \alpha$

אומרים כיסוי אחיד (*uniform covering*) אם הוא δ -אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא מספר לבג (*Lebesgue*) של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב

X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α .

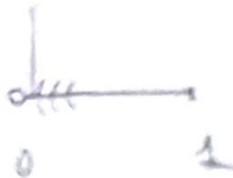
(ז"א $diam B < \delta \Rightarrow \{B\} < \alpha$.)

הערות:

(1) אם $0 < \delta < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

(2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג δ .

(3) דוגמה: כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.



$$A_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right] \quad X = (0, 1] \notin Comp$$

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

כיסוי פתוח של $(0, 1]$. אבל אין מספר לבג עבור α .

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל α ,

$$A := B_{\frac{\delta}{5}}\left(\frac{1}{5}\delta\right) = \left(0, \frac{3}{5}\delta\right)$$

$$\text{diam}(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$$

אבל A לא מוכל באף איבר של α .

משפט: (מספר Lebesgue)

נניח (X, d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$$diam(A_n) < \frac{1}{n} \quad \text{אבל } A_n \text{ לא מוכל באף איבר של } \alpha$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

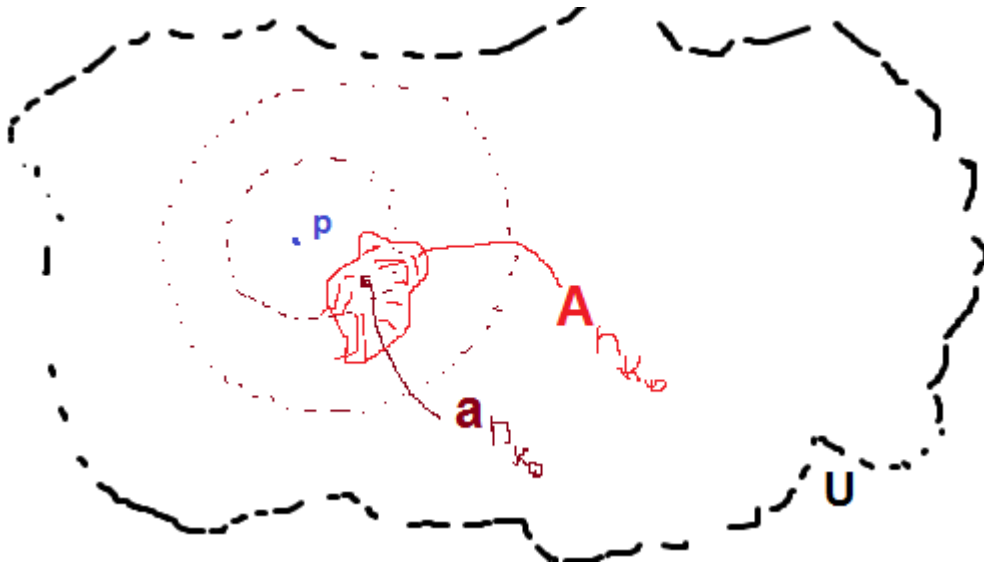
נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזובילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = p$.

α כיסוי. קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)



$$\forall x \in A_{n_{k_0}} \quad d(p, x) \leq d(p, a_{n_{k_0}}) + d(a_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_\varepsilon(p) \subseteq U \in \alpha$. אז גם $A_{n_{k_0}} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(p)$! סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} < \alpha$

משפט: נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f : X \rightarrow Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\varepsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים:

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_\varepsilon(y)) : y \in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

בניח $d(x_1, x_2) < \delta$ אז $diam\{x_1, x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{f(x_1), f(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subseteq B_\varepsilon(y)$

לכן $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq diam(B_\varepsilon(y)) \leq 2\varepsilon$

☺

תרגיל: בניח (X, d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x, y \in X$ כך ש –

$$diam(X) = d(x, y)$$

סקיצה: $X \times X \in Comp$ ו $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ רציפה (מדוע ?) ...

הגדרה: פונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

דוגמאות:

"(דו-נקודתית)" $i : (-1, 1) \rightarrow [-1, 1]$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1[0] \quad f(v) = \frac{v}{1+|v|}$$

"(חד-נקודתית)" $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \quad f(n) = \frac{1}{n}$

תרגיל* (יהיה בתירגול) -- קומפקטיפיקציה חד-נקודתית (Alexandroff)

בניח (X, τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף"). בקבוצה

$$X^* = X \cup \{p\} \quad \tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K : K \text{ is compact}\}$$

הוכיחו:

$$1. (X^*, \tau^*) \in Comp \cap T_2$$

2. פונקצית ההכלה $i : X \rightarrow X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

דוגמאות:

$X = \mathbb{R}^n$ אז $X^* \simeq S_n$ (הטלה סטראוגרפית)

$X = \mathbb{N}$ אז $X^* \simeq \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$$X^* \simeq 8 \text{ אז } X = (-\infty, 1) \cup (5, 7)$$

תרגיל: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי). נניח ל $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$

$$\text{משפט: } LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$$

הוכחה: נניח $X \in LComp \cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. לכן גם $X \in T_{3.5}$. בה"כ $X \notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i: X \rightarrow X^* \in Comp \cap T_2$. ברור $X^* \in T_4$.

(כי $Comp \cap T_2 \subset T_4$). מצד שני $T_4 \subset T_{3.5}$ (כי $T_4 = T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn). לכן $X^* \in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X \in T_{3.5}$.

☺

תזכורת: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

תרגיל: הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

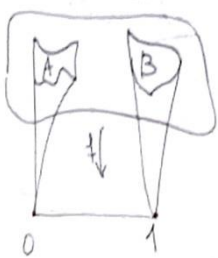
1. X קומפקטי מקומית והאוסדורפי.
2. קיימת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

רמז: תת קבוצה פתוחה במרחב האוסדורפי קומפקטי (מקומית) מגדיר תת מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית.

$$\text{משפט: } Metriz \subset T_4$$

הוכחה: $(X, \tau) \in Metriz \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

מ"ל:



- א. $X \in T_1$.
- ב. לכל סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

(א) ברור $Metriz \subset T_2$.

$$\text{(ב) נגדיר } f: X \rightarrow [0, 1] \text{ ע"י: } f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)}$$

$$\text{כאשר } f_A(x) = d(x, A), f_B(x) = d(x, B)$$

- $0 \leq f(x) \leq 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי $f_A(x) \geq 0, f_B(x) \geq 0$ – לכן המכנה $= 0$ אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

↕

$$\begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases}$$

↕

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

• נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X, [0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

$$\forall a \in A: f(a) = \frac{0}{0} = 0 \quad \bullet$$

$$\forall b \in B: \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1 \quad \bullet$$

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset O$$

הסבר: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות

$$U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$$

אז נקבל $A \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O$

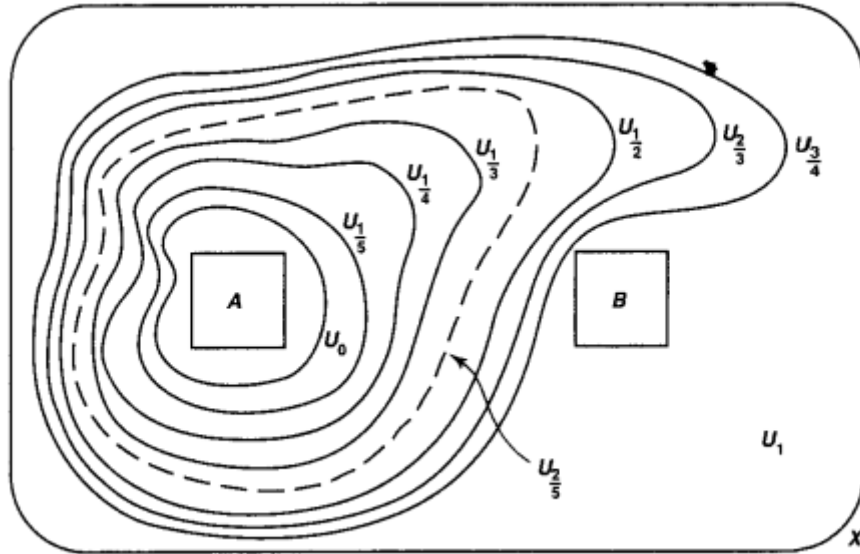
הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

משפט (למה של Urysohn): $T_4 = T_4^{func}$

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn (פונקציה רציפה $f: X \rightarrow [0,1]$ $f(A) = 0, f(B) = 1$)

הוכחה: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש
 $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקה למשל: $U_t := f^{-1}[0,t]$. שימו לב: $\overline{[0,s]} \subseteq [0,t]$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{1/2}$

$$A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset X \setminus B \quad \text{כך ש}$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{1/4}, U_{3/4}$ כך ש

$$A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו!

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t \quad \{U_t : t \in D\}$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq 2^n\}$ **צפופה** ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\}$

$0 \leq f(x) \leq 1 \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in A \quad f(b) = 1 \quad \forall b \in B$ •

כי $\forall t \in D \quad A \subseteq U_t \subseteq X \setminus B \subseteq X = U_1 \quad 0 \in \bar{D} = [0,1]$

• **(נדלג על הבדיקה)** רציפה $f : X \rightarrow [0,1]$

לפי תכונת פרא-בסיס (ב $[0,1]$) מ"ל $f^{-1}(a,1), f^{-1}[0,a)$ פתוחות ב X .

א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a) = \{x \in X : f(x) < a\}$

קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a) = \bigcup_{t < a} U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3) .

ב. ש"ל $f^{-1}(a,1] \setminus X$ סגור.

קודם נעיר $f^{-1}(a,1] = \{x \in X : f(x) \leq a\}$

עכשיו מ"ל $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \bigcap_{a < t} \bar{U}_t$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב (t_3^c))

(\subseteq)

נניח $y \in \{x \in X : f(x) \leq a\}$. נבחר דיאדי $s \in D$ כך ש $a < s < 1$ (צפיפות D !)

אז לכל $a < t < s$ נקבל $\bar{U}_t \subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y) \leq a < t$ מתקיים $y \in U_t \subseteq \bar{U}_t$. לכן $y \in \bigcap_{a < t} \bar{U}_t$.

(\supseteq)

נניח $y \in \bigcap_{a < t} \bar{U}_t$. נבחר ε כך ש $0 < \varepsilon < 1 - a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$a < t < a + \varepsilon < 1$ כך ש $t \in D$

וגם $s \in D$ כך ש $t < s < a + \varepsilon$.

ברור שאז $\bar{U}_t \subseteq U_s$. לכן $y \in U_s$. מכאן $f(y) \leq s < a + \varepsilon$.

קיבלנו $\forall 0 < \varepsilon < 1 - a \quad f(y) < a + \varepsilon$.

ז"א $f(y) \leq a$.

☺

https://en.wikipedia.org/wiki/Urysohn%27s_lemma ראו גם:

הערה: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X \in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : A \rightarrow [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F : X \rightarrow [0,1]$.

נוכיח רק (1) \rightarrow (2):

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A := C \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $f : A \rightarrow [0,1]$ $f(A) = 0, f(B) = 1$. אז היא רציפה

(שימו לב: $A := C \cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F : X \rightarrow [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B .

תרגיל: * (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה על $F : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$
הסבר:

קיים הומיאומורפיזם $h : C \rightarrow C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi : C \rightarrow [0,1]$

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h : C \rightarrow [0,1] \times [0,1]$

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$



הגדרה: נניח $S = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. מפריד נקודות אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0} : X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$

ב. מפריד נקודות וקבוצות סגורות אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה C ב X כך ש $x \notin C$

קיים $f_{i_0} : X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(C)}$

משפט (על פונקציות האלכסון):

1. נניח $S = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקציות האלכסון

$$f = \Delta_{i \in I} f_i : X \rightarrow Y = \left(\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi} \right) \quad f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

א. אם S מפריד נקודות אז f רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X \in T_1$ אז f שיכון טופולוגי.

הוכחה: א. לפי משפט על האלכסון f רציפה ומתקיים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$.
 לכן אם $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1) = (f_i(x_1))_{i \in I} \neq f(x_2) = (f_i(x_2))_{i \in I}$.
 ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקציית אלכסון היא חח"ע.
 מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f : X \rightarrow f(X)$ סגורה.
 מ"ל $f(C) = f(X) \cap \overline{f(C)}$ לכל C סגור ב X .
 מ"ל $f(C) \supseteq f(X) \cap \overline{f(C)}$ (הכלה \subseteq ברורה).
 נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(C)}$. צ"ל $y \in f(C)$.
 נקבל $\exists x \in X \quad y = f(x) \in \overline{f(C)}$.
 אז בגלל השוויונים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$ רציפות ההטלות נקבל
 $\forall i \in I \quad f_i(x) = p_i(f(x)) \in p_i \overline{f(C)} \subset \overline{p_i f(C)} = \overline{f_i(C)}$
 זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה C . אז בהכרח $x \in C$.
 זה מוכיח $y = f(x) \in f(C)$.

☺

הרצאה 13

משפט: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).

2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפליית ותורשתית.
 לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$2 \Leftarrow 1$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f : X \rightarrow [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט Urysohn $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a, b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה $f_{a,b} : X \rightarrow [0,1]$, $f(a) = 0, f(b) = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $s = (a,b)$)

משרה פונקציית האלכסון $f : X \rightarrow [0,1]^S$ $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).



משפט (האוניברסליות של קוביות Tychonoff)

התנאים הבאים שקולים:

$$1. X \in T_{3.5}$$

$$2. X \text{ משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת } [0,1]^S.$$

הוכחה:

$$1 \Leftarrow 2$$

$X \in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{f_s : X \rightarrow [0,1]\}_{s \in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל

$$f = \Delta_{s \in S} f_s : X \rightarrow [0,1]^S \text{ פונקציית האלכסון } C(X, [0,1]).$$

שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקציית האלכסון.

$$2 \Leftarrow 1$$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.



תוצאה חשובה: $X \in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

משפט (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

$$1. X \in Metr_{2.1} \cap Sep \text{ (שקול: } X \in Metr_{2.1} \cap B_2)$$

$$2. X \text{ משוכן לתוך קובית Hilbert } [0,1]^{\mathbb{N}}$$

הוכחה:

$$2 \Leftarrow 1$$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \rightarrow [0,1]\}_{s \in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נתון $X \in \text{Metriz} \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

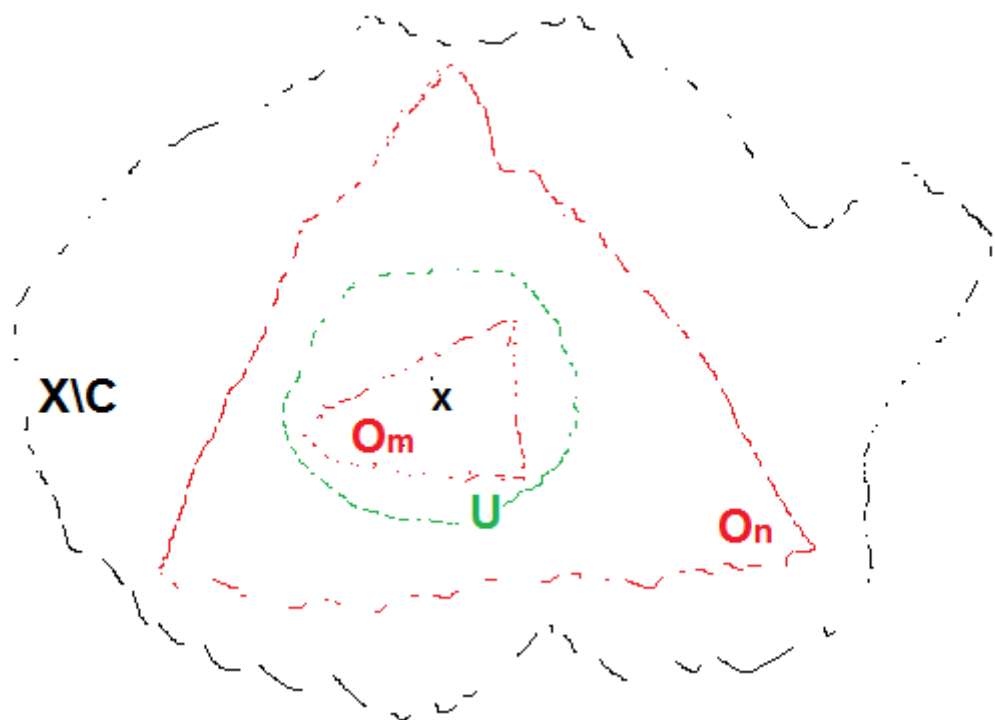
לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \rightarrow [0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0, f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $\text{Metriz} \subseteq T_4 = T_4^{\text{func}}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור

סביבה פתוחה $O_n \in \gamma$ כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $(x \in U = B(x, \varepsilon) \subset \overline{B(x, \varepsilon)} \subset B[x, \varepsilon] \subset O_n$).

נקבל $x \in O_m \subseteq U$ כך ש $O_m \in \gamma$ בסיס לכן קיים $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקציה אוריסון $f_{m,n}: X \rightarrow [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $\overline{O_m}, X \setminus O_n$)

$1 \Leftarrow 2$

$[0,1]^{\mathbb{N}} \in \text{Metriz} \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי Metriz, B_2 תכונות תורשתיות).

☺

מידע:

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset \text{Metriz}$

(ראו למשל ספר מצויין: (J.R. Munkres, Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתון מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

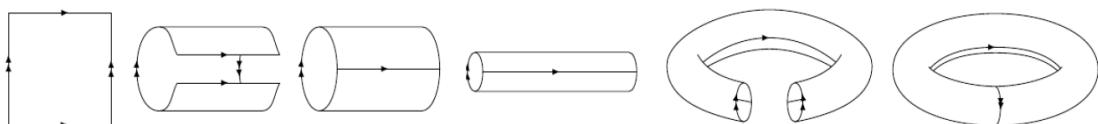
$$\varphi: [0,1]^{\mathbb{N}} \rightarrow l_2 \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{3}a_3, \dots)$$

טופולוגית מנה -- Quotient topology

למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר:

תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".

למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from <http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png>.

נניח (X, τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה? מה הן ההגדרות המתאימות?

תזכורת (מתורת הקבוצות) נניח \sim יחס שקילות במרחב (X, τ) . נסמן:

$$[a] := \{x \in X \mid a \sim x\} \quad \bullet$$

(תמיד $a \in [a]$ ויש חלוקה $X = \coprod_{a \in X} [a]$)

- "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות $X/\sim = \{[a] : a \in X\}$
- "פונקציה (העתקת) טבעית" (תמיד על) $\rho : X \rightarrow X/\sim \quad a \mapsto [a]$

שאלה: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב X/\sim כאשר X מ"ט?

שקול: נתונה פונקציה על $q : X \rightarrow Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $a \sim b \Leftrightarrow q(a) = q(b)$ אז נקבל יחס שקילות כך ש Y וקבוצת מנה X/\sim הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q : X \rightarrow Y$.

הגדרה: ננח (X, τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q : X \rightarrow Y$. אומרים ש σ טופולוגית המנה (ביחס לפונקציה $q : (X, \tau) \rightarrow Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ רציפה.

ב. אם $q : (X, \tau) \rightarrow (Y, \lambda)$ רציפה אז $\lambda \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ היא פונקצית מנה (או העתקת מנה).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

תאור של טופולוגית המנה: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid q^{-1}(O) \in \tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X .

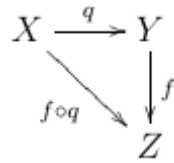
שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

בניח $q : X \rightarrow Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f : Y \rightarrow Z$.
 אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) רציפה ההרכבה $f \circ q : X \rightarrow Z$.



הוכחה: נניח $f \circ q : X \rightarrow Z$ רציפה. צ"ל $f : Y \rightarrow Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z .

נתון ש $q : X \rightarrow Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X . אבל

$$f \circ q : X \rightarrow Z \text{ ונתונה רציפות של } q^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ q)^{-1}(O)$$

☺

תוצאה: נניח $q : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q : X \rightarrow Y$.

ז"א אם $q : (X, \tau) \rightarrow (Y, \gamma)$ רציפה אז $\gamma \subseteq \sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f : Y \rightarrow Z$ ניקח $\text{id} : (Y, \sigma) \rightarrow (Y, \gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q : X \rightarrow Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q : X \rightarrow Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ פתוחה ב X עבור $O \subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y .

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q על לכן $q(q^{-1}(O)) = O$ חייבת להיות פתוחה.

☺

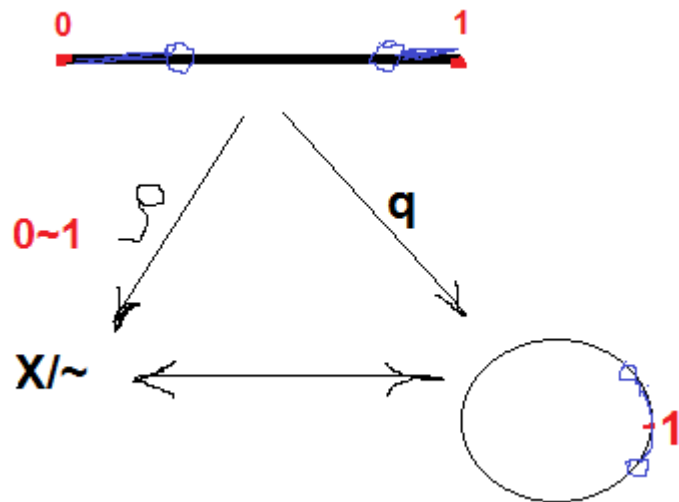
תוצאה: כל הטלה $p_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$ היא פונקצית מנה.

תוצאה: נניח $f : X \rightarrow Y$ רציפה, על $X \in \text{Comp}, Y \in T_2$. אז f פונקצית מנה.

דוגמה: $f : X = [0,1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$ $f(x) = \text{cis}(2\pi x)$
 היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה וסגורה).

הערה: כאן אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \rightarrow X/\sim \cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $\text{id} : (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה על אבל לא פונקצית מנה.

הסבר: המקור $\text{id}^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}})$ אבל לא ב \mathbb{R} .

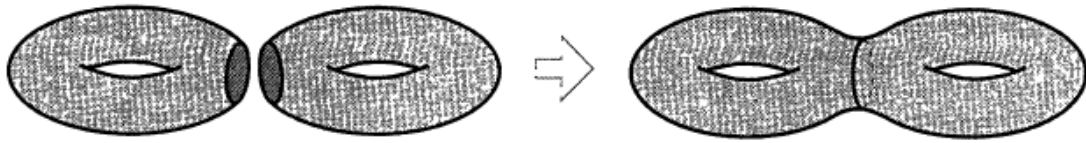
דוגמה: פונקציה רציפה $\text{id} : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h : X = [0,1) \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$ $h(x) = \text{cis}(2\pi x)$
 הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A := \{z \in T \mid 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A) = [0, \frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$ אבל A לא פתוח ב T .

הרצאה 14

טופולוגיית מנה (המשך)



תזכורת:

הגדרה: נגח (X, τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q: X \rightarrow Y$

(למשל $q: X \rightarrow X/\sim$ פונקציה שמושרית מיחס שקילות).

אומרים ש σ טופולוגיית המנה אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ רציפה.

ב. אם $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \lambda)$ רציפה אז $\lambda \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ היא פונקציית מנה (או העתקת מנה).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיית חזקה" (strong topology).

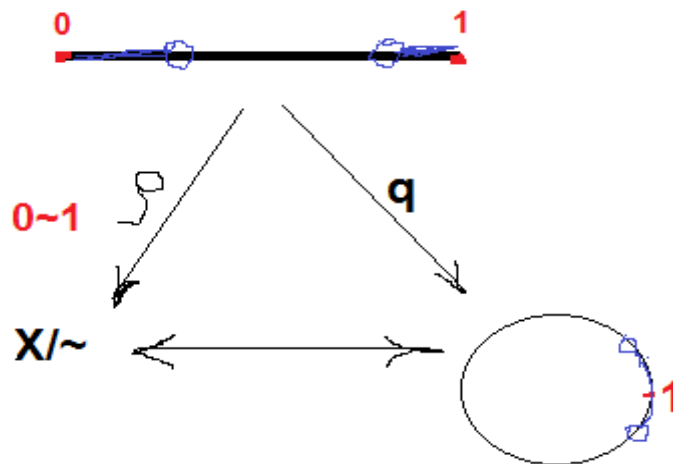
תאור של טופולוגיית המנה: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid q^{-1}(O) \in \tau\}$

דוגמה: $f: X = [0, 1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ $f(x) = \text{cis}(2\pi x)$

היא פונקציית מנה (הפונקציה היא על רציפה וסגורה).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \rightarrow X/\sim \cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $\text{id} : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה על אבל לא פונקצית מנה.

הסבר: המקור $\text{id}^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ אבל לא ב \mathbb{R} .

דוגמה: פונקציה רציפה $\text{id} : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h : X = [0,1) \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$ $h(x) = \text{cis}(2\pi x)$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A := \{z \in T \mid 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A) = [0, \frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T .

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה $A \subseteq X$. ופונקצית על שמושרית $f_A : A \rightarrow f(A)$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A = [0,1) \subset X = [0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1 : X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ לא מנה

(כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X)

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב \mathbb{R} .

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור.

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: עבור הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

טופולוגית מנה על $Y = \{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1 .

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. אז מרחב מנה \mathbb{R}/\sim

הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של \mathbb{R}/\sim ?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a] = a + \mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב \mathbb{R} .

לכל מקור $q^{-1}(C)$ של תתקבוצה לא ריקה C ב \mathbb{R}/\sim לגבי פונקציה טבעית $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$

הקבוצה $q^{-1}(C)$ היא גם צפופה ב \mathbb{R} (כי $q^{-1}(C)$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(C)$ סגור היא $q^{-1}(C)$. אבל אז

$C = qq^{-1}(C) = q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ על).

לכן ב \mathbb{R}/\sim עם טופולוגיה מנה σ יש רק קבוצה אחד סגורה לא ריקה (שהיא \mathbb{R}/\sim).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (הומיאומורפיזם ומנה)

נניח $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f: X \rightarrow Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ מתקיים תמיד $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם

$U = f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגיה מנה קבוצה $O := f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y .

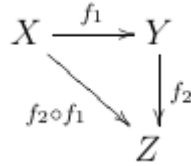
הוכחנו ש f פתוח.



משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1: X \rightarrow Y$ $f_2: Y \rightarrow Z$ פונקציות רציפות.

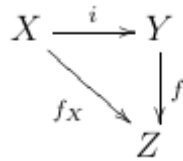
אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1: X \rightarrow Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2: Y \rightarrow Z$ פונקצית מנה.



הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \rightarrow Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y . לפי הרציפות של $f_1 : X \rightarrow Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X . ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \rightarrow Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \rightarrow Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \rightarrow Z$ מנה.
הסבר: נפעיל משפט " הכללת קריטריון מנה " באופן הבא
 כאשר $i : X \rightarrow Y$ שיכון טבעי



☺

הגדרה: נניח $f : X \rightarrow Y$ ונתון יחס שקילות \sim ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \rightarrow Y$

א. **מכבדת את היחס \sim** אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$

ב. **מגדירה את היחס \sim** אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

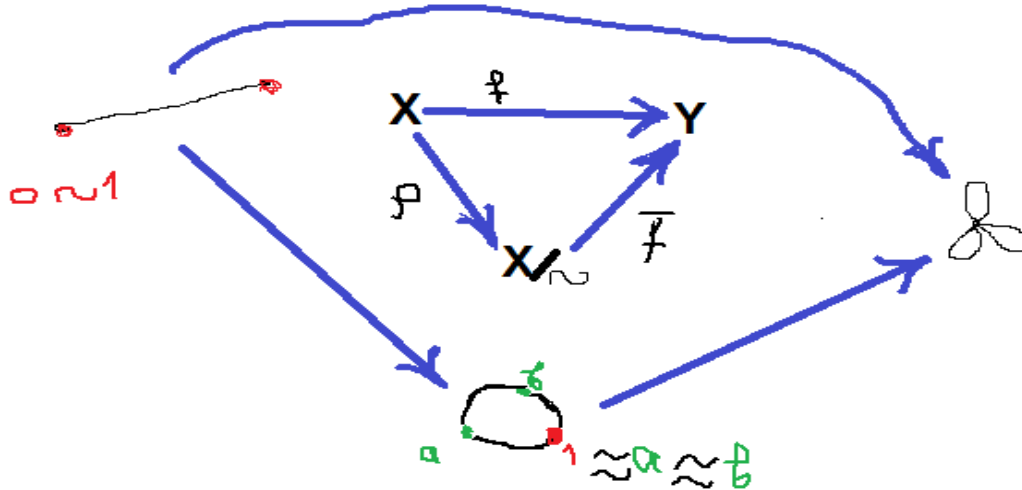
תכונות:

1. $f : X \rightarrow Y$ **מכבדת את היחס \sim** אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$$(\bar{f} = \bar{f} \circ \rho \text{ ז"א}) \quad \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y \quad \bar{f}([x]) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x)$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow \rho & \uparrow \bar{f} \\
 & & X/\sim
 \end{array}$$

הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \rightarrow Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות \sim למשל



מוסקמה: בהמשך על X/\sim ניקח טופולוגיה מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \rightarrow Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ רציפה.

הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & X/\sim \\
 & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\
 & & Y
 \end{array}$$

אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה אז גם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$.

3. $f : X \rightarrow Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & X/\sim \\
 & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\
 & & Y
 \end{array}$$

אם $f : X \rightarrow Y$ מנה אז גם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$.

4. $f : X \rightarrow Y$ מגדירה את היחס \sim אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ והיא חז"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב X/\sim_f מרחב מנה כאשר \sim_f הוא היחס שמוגדר ע"י $f : X \rightarrow Y$ (ז"א $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \sim_f b$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f : X \rightarrow Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב \Leftarrow א

ברור כי $f = \bar{f} \circ \rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho : X \rightarrow X/\sim_f$ פונקצית מנה (כי בחרנו X/\sim_f בטופולוגית מנה) ו \bar{f} הומיאומורפיזם.

א \Leftarrow ב

נתון $f : X \rightarrow Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ גם מנה. אבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ (על ו) חז"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "הומיאומורפיזם ומנה" נקבל ש $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ הומיאומורפיזם.



הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיאומורפיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f : X = [0,1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\} \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$$f : X \rightarrow T \quad 0 \sim 1$$

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\bar{f}: [0,1]/\sim_f \rightarrow T$
 לכן $[0,1]/\sim_f \cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong T$.

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f: \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$$a \sim_f b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\mathbb{Z}}$$

הערה: מחלקת שקילות של $a \in \mathbb{R}$ הוא $[a] = a + \mathbb{Z}$. ז"א תאור אחר של היחס הוא

$$a \sim_f a + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

תרגיל: * במעגל יחידה $T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ במישור המרוכב נגדיר יחס שקילות $-v \sim v$.

הוכיחו שמרחב מנה T/\sim הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T .

פתרון: $f: T \rightarrow T, f(v) = v^2$ היא פונקצית מנה (מדוע?). היא מגדירה יחס שקילות

בדיוק $-v \sim v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית

חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2 = \{e, \sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2 \times T \rightarrow T \quad (\sigma, v) \mapsto \sigma(v) = -v$$

תרגיל: הוכיחו שאם ב \mathbb{R} לכוף קטע $[0, 1]$ לנקודה 0 אז מרחב מנה הומיאומורפי ל \mathbb{R} .

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 \leq x \end{cases}$$

הפונקציה היא רציפה על "ומדביקה" את כל הנקודות של קטע $[0, 1]$. על מנת להוכיח שהפונקציה היא מנה מ"ל שהיא סגורה נתבונן ב 3 פונקציות צמצום שהן רציפות:

$$f_1: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0], f_2: [0, 1] \rightarrow \{0\}, f_3: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

שמגדירות את הפונקציה באופן טבעי.

הפונקציות גם סגורות (שני הומיאומורפיזמים ואחד קבוע).

התמונות הן סגורות ב \mathbb{R} . לכן גם ההרכבות

$$f_1: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_3: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציות סגורות.

לכל תת קבוצה סגורה $A \subseteq \mathbb{R}$ נציג אותה כאיחוד

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad A_1 = A \cap (-\infty, 0], A_2 = A \cap [0, 1], A_3 = A \cap [1, \infty)$$

של 3 תת קבוצות סגורות ב \mathbb{R} . התמונה $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$

סגורה ב \mathbb{R} כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

יריעות מסוימות כמנה של ריבוע

הגדרה: יריעה בעלת מימד n היא מרחב האוסדורף, שמקיים את אקסיומת המנייה השנייה, בעל התכונה שלכל נקודה במרחב יש סביבה שהומיאומורפית לחצי-מרחב

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n\}$$

אם במקום H אפשר לקחת \mathbb{R}^n אז אומרים יריעה ללא שפה.

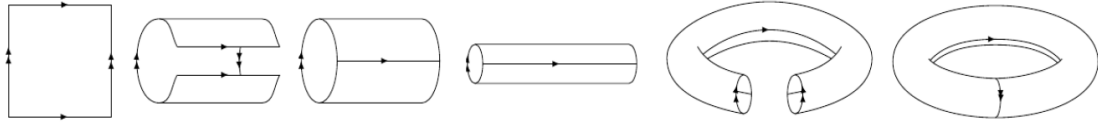
למשל: כל קבוצה פתוחה ב \mathbb{R}^n יריעה בעל מימד n , מעגל, טורוס ... יריעה ללא שפה.

כדור סגור ב \mathbb{R}^n יריעה בעל מימד n עם שפה. ריבוע יריעה בעל מימד 2 עם שפה.

נראה כמה דוגמאות של יריעות 2-ממדיות שמתקבלות כמנה של ריבוע.

• טורוס דו-ממדי T^2 2-dimensional torus

אפשר לקבל אותו כמנה של גליל (שלב ביניים)



This image from <http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png>.

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

($\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגיית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \quad f(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi y)$

צמצום הפונקציה $f : [0, 1]^2 \rightarrow T^2$ פונקציית מנה. לכן לפי משפט (תנאי מספיק "צמצום") גם $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ מנה.

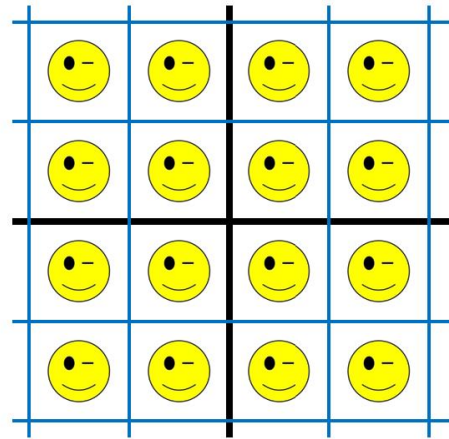
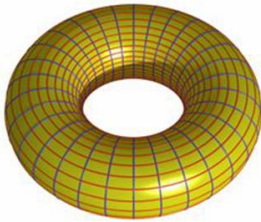
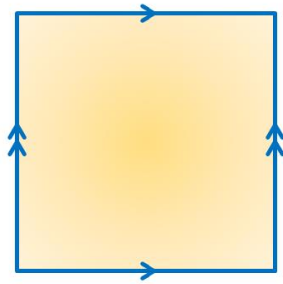
כעת לפי משפט (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$.

כאן יחס שקילות מתאימה היא $(a, b) \sim_f (a + n, b + m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$ המחלקות

הן $\{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

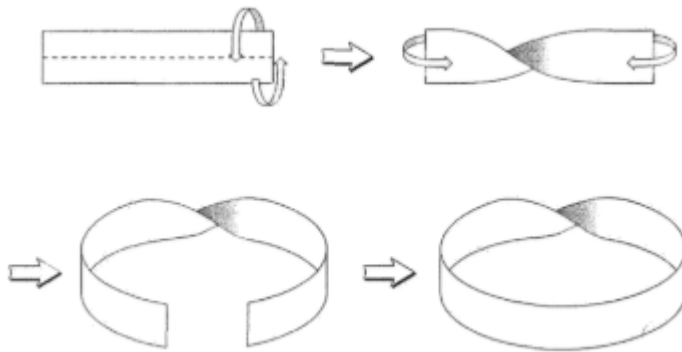
לכן מרחב מנה \mathbb{R}^2 / \sim_f כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

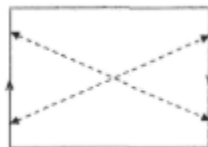


מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

• Mobius strip טבעת מוביוס

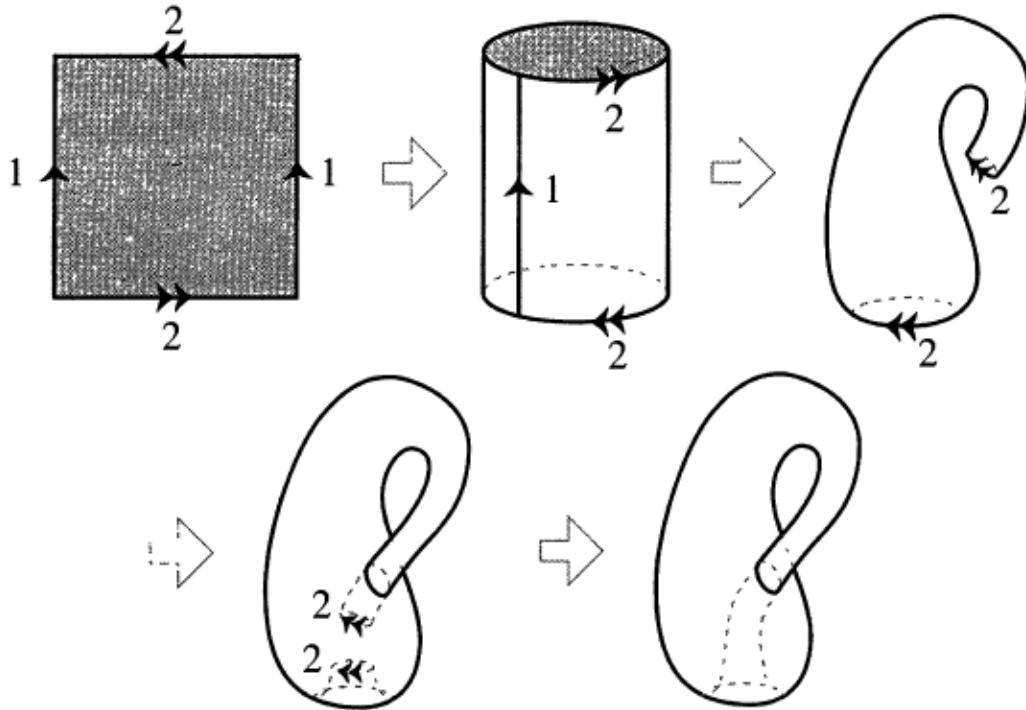


משוכן לתוך \mathbb{R}^3 . הוא 2-ממדי. ללא אוריאנטציה. אפשר לקבל אותו גם כך



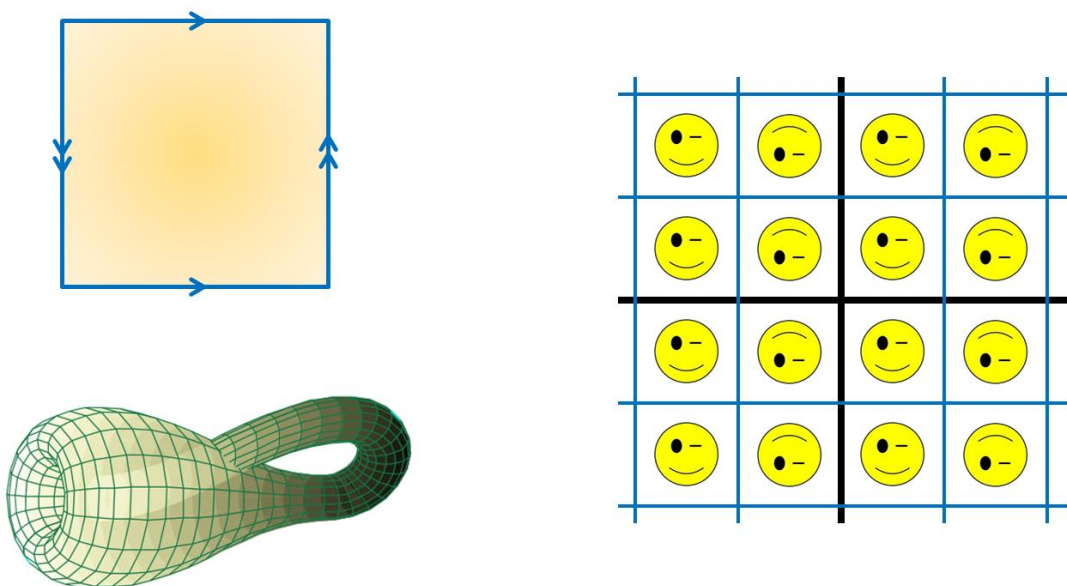
Klein bottle בקבוק קליין •

אפשר לקבל אותו כמנה של ריבוע



לא ניתן לשכן לתוך \mathbb{R}^3 .

אפשר לקבל אותו דרך הדבקת שפות של שתי טבעות מוביוס.

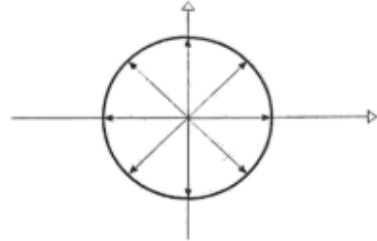


• מרחב פרויקטיבי Projective space

$P^n =$ מרחב קווים ישרים ב $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ שעוברים דרך 0 .

$$q: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n$$

פונקציה מנה



צמצום של הפונקציה הנ"ל $q_S: S^n \rightarrow P^n$ על ספירה יחידה n -ממדית מוכיח שאכן q מנה בגלל תוצאה של ה **משפט**: תנאי מספיק "צמצום" כאן יחס שקילות שמתקבל על S^n הוא $-v \sim v$ (antipodal points)

Projective line מקרה פרטי $q: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow P^1$

טענה: P^1 הומואומורפי למעגל S^1 .

הסבר: שקול לדבר על מישור \mathbb{R}^2 כמרחב מספרים מרוכבים \mathbb{C} . ובמקום S^1 על T .

נגדיר (תרגיל שהיה) $f: T \rightarrow T, f(v) = v^2$ היא פונקציה מנה (פונקציה רציפה ועל מקומפקטי להאוסדופי). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $-v \sim v$.

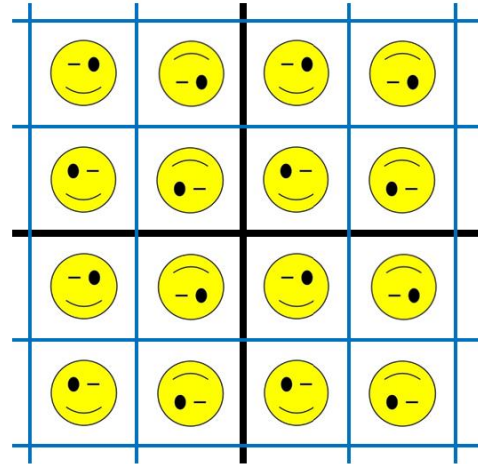
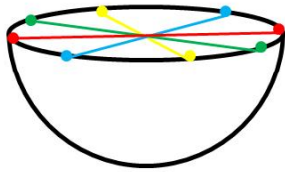
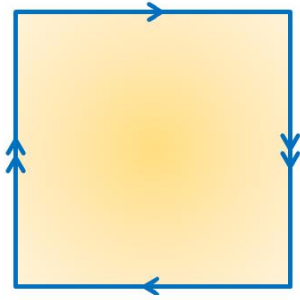
מישור פרויקטיבי Projective plane

$P^2 =$ מרחב קווים ישרים (מנוקבים) ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ שעוברים דרך 0 .

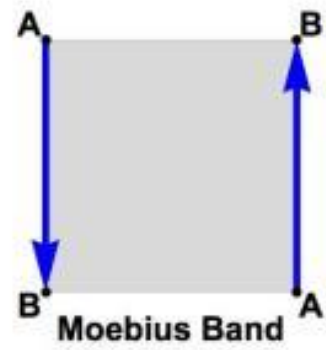
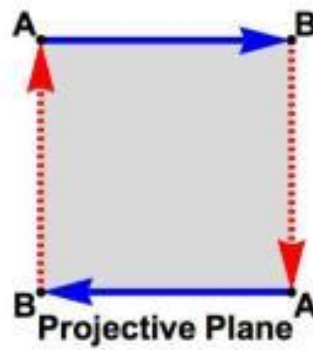
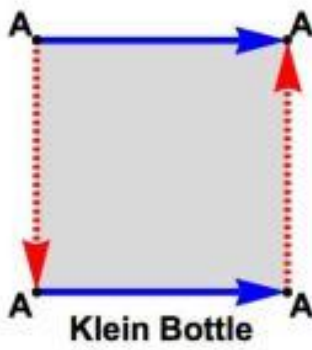
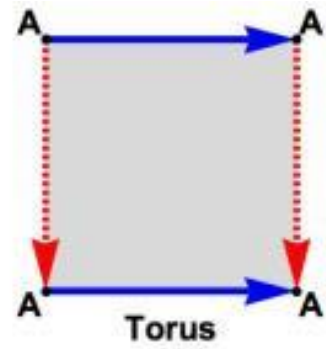
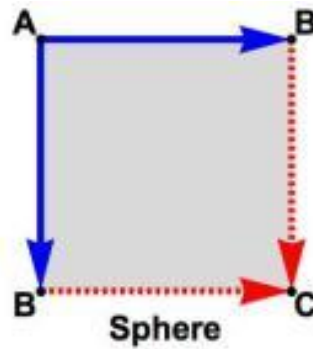
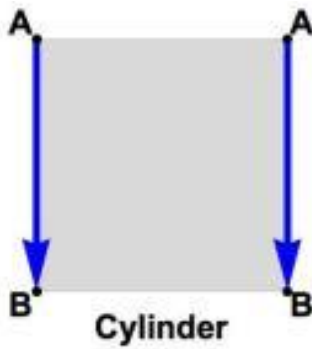
$$q_S: S^2 \rightarrow P^2$$

אפשר לקבל דרך

אפשרויות נוספות: כמנה של ריבוע, כמנה של חצי-ספירה, כמנה של מישור



סיכום: מנות מסוימות של ריבוע



תרגילים נוספים:

תרגיל: בספירה $S_2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

לתאר מרחב מנה S_2 / \sim .

תרגיל: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

מה הוא מרחב מנה \mathbb{R} / \sim ?

תרגיל: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

מה הוא מרחב מנה \mathbb{R} / \sim ?

תרגיל: * מרחב מנה $S \times [0,1] / \sim$ של גליל $S \times [0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $S \times \{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לדיסק סגור דו-מימדי

רמז: פונקציה $f : S \times [0,1] \rightarrow D$ $f(x,t) = tx$

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X . פונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת "רטרקציה"

retraction אם היא רציפה על כך ש $\forall y \in Y \quad f(y) = y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f \circ f = f$)

תרגיל: * נניח $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של \mathbb{R}^2).

נגדיר פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = x$ (צמצום של הטלה).

הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

ספר מומלץ נוסף:

[C. Adams](#) and [R. Franzosa](#), **Introduction to Topology: Pure and Applied, 2008**

מלבד חומר מעניין על טופולוגיה אפשר למצוא בספר זה גם תאור ידידותי מאוד של אישומים של טופולוגיה בתחומים שונים: כלכלה, תורת המשחקים, פיזיקה וכולי.

תרגילים (מסוימים ששאלנו בהרצאות)

תרגיל: "בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X, d) :

(א) כל קבוצה סגורה היא G_δ .

(ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ .

פתרון: א. לכל קבוצה סגורה A במ"מ (X, d) יש פונקציה רציפה

$$f_A : X \rightarrow [0, \infty) \quad f_A(x) = d(x, A)$$

$$\text{כך ש } f_A^{-1}(0) = A \text{ . כעת נגדיר } O_n := f^{-1}[0, \frac{1}{n}) \text{ אז } A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

ב. נובע מחלק א (משלים וכללי de Morgan)

☺

תרגיל: הוכיחו שמרחב (\mathbb{Z}, d_p) (עם מטריקה p -אדית) הוא לא קשיר לחלוטין.

פתרון: (\mathbb{Z}, d_p) האוסדורפי. מ"ל שהוא בעל מימד 0. כדורים פתוחים מרכיבים בסיס בכל מ"מ.

מ"ל כל כדור של (\mathbb{Z}, d_p) הוא קבוצה סגורה.

במרחב מטרי (\mathbb{Z}, d_p) כל המרחקים החיוביים הם מהצורה $\frac{1}{p^m}$ ($m \in \{0, 1, \dots\}$). לכן

$$B_r(u) = B_{\frac{1}{p^m}}[u] \quad \forall \frac{1}{p^m} < r \leq \frac{1}{p^{m-1}}$$

כל כדור פתוח במרחב זה הוא בעצם גם כדור סגור.

☺

תרגיל: הוכיחו שכל הכדורים (פתוחים וסגורים) ב (\mathbb{Z}, d_p) הם הומיאומורפיים.

פתרון: קודם כל טענת עזר: $f_a(x) = ax$ $(\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_p)$ רציפה לכל $a \in \mathbb{Z}$.

הפונקציה היא גם חח"ע לכל $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

רציפות נובעת מ $d_p(ax, ay) \leq d_p(x, y)$

(זה נכון כי $(p^k | (x - y) \Rightarrow p^k | (ax - ay)$)

נגדיר פונקציה $f_{p^m} : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_p)$ $f_{p^m}(x) = p^m x$ אז היא חח"ע ורציפה. התמונה היא

כדור סגור הבא $f(\mathbb{Z}) = p^m \mathbb{Z} = B_{\frac{1}{p^m}}[0]$. פונקציה הפכית

מוגדרת היטב וגם רציפה $f_{p^m}^{-1} : B_{\frac{1}{p^m}}[0] \rightarrow \mathbb{Z}$ $x \mapsto \frac{x}{p^m}$

(הפעם שימו לב $d_p(\frac{1}{p^m}x, \frac{1}{p^m}y) \leq p^m \cdot d_p(x, y)$ $(\forall x, y \in p^m \mathbb{Z})$)

נזכיר ש $\mathbb{Z} = B_1[0]$. לכן בשלב זה אפשר לסכם שכל כדורים הסגורים עם מרכז ב 0 הם הומיאורפיים ל (\mathbb{Z}, d_p) .

כעת מספיק להוכיח שהזזות $T_u : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_p)$ $T_u(x) = u + x$

הן איזומטריות (ולכן גם הומיאורפיזמים) ומתקיים $T_u(B_r[0]) = B_r[u]$.

☺

תרגיל: א. למיין קטעים שהם יותר מנקודון ב \mathbb{R} עד כדי הומיאורפיזמים.

ב. מתי קיימת פונקציה רציפה ועל בין הקטעים הנ"ל?

פתרון: א. יש שלוש מחלקות קטעים עד כדי הומיאורפיזמים:

$$\mathbb{R} \simeq (a, b) \simeq (a, \infty) \simeq (-\infty, b) \quad (A)$$

$$[a, b) \simeq (c, d] \simeq [a, \infty) \simeq (-\infty, b] \quad (B)$$

$$[a, b] \quad (C)$$

ב. בגלל חלק א מספיק לבדוק רק 3 נציגים של המחלקות הנ"ל מחלק א

באופן סמלי התשובה היא: $(A) \rightleftarrows (B) \rightarrow (C)$

יחסית קל למצוא פונקציות רציפות על $(A) \rightarrow (B) \rightarrow (C)$.

$$(A) \rightarrow (B) \quad \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases} \quad \text{למשל:}$$

$$(B) \rightarrow (C) \quad (-\infty, 1] \rightarrow [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$

מקרה של $(B) \rightarrow (A)$ הוא הרבה פחות קל. אפשר למשל לבחור פונקציה הבאה

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

☺

תרגיל: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

$$X = 8 \quad (א)$$

$$X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup \{7\} \quad (ב)$$

תשובה:

(א) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $\{a\} = [a]$ (נקודת ההשקה של שני מעגלים).

קחו בחשבון שסימטריה לגבי נקודת a מגדיר הומיאומורפיזם

(ב) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $\{7\} = [7]$ (נקודת מבודדת יחידה במרחב).

קיים הומיאומורפיזם $h : (0, 1) \rightarrow (2, 4)$ מגדיר הומיאומורפיזם

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x) = h(x) \quad \forall x \in (0, 1), \quad f(x) = h^{-1}(x) \quad \forall x \in (2, 4), \quad f(7) = 7$$

קחו בחשבון $(0, 1)$, $(2, 4)$ מרחבים הומוגניים (כל אחד הומיאומורפי ל \mathbb{R}).

☺

תרגיל: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית (G, τ, \cdot) היא הומוגנית.

פתרון: לכל $a \in G$ מוגדרת הזזה $T_a(x) = ax$. היא רציפה כי

אפשר להציג אותה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות (שיכון ומכפלה)

$$G \rightarrow G \times G \rightarrow G \quad x \mapsto (a, x) \mapsto ax$$

כל הזזה חח"ע ועל. ההופכי של $T_a : G \rightarrow G$ הוא $T_{a^{-1}} : G \rightarrow G$. שהוא גם רציף. לכן כל הזזה בעצם הומיאומורפיזם.

לכל שתי נקודות $x, y \in G$ מתקיים $T_a(x) = y$ עבור $a = yx^{-1}$.

☺

תרגיל: נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב- X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

פתרון: נניח בשלילה ש X לא קשיר. אז יש פירוק טופולוגי

$$X = X_1 \cup X_2 \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad X_1 \neq \emptyset \quad X_2 \neq \emptyset \quad X_1, X_2 \in \tau$$

נתון ש Y צפופה ב- X . לכן Y פוגש כל תת רבוצה פתוחה לא ריקה ב- X . בין היתר

$$Y \cap X_1 \neq \emptyset, \quad Y \cap X_2 \neq \emptyset$$

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \quad Y_1 \neq \emptyset \quad Y_2 \neq \emptyset \quad Y_1, Y_2 \in \tau_Y$$

סתירה לנתון $Y \in Conn$.

☺

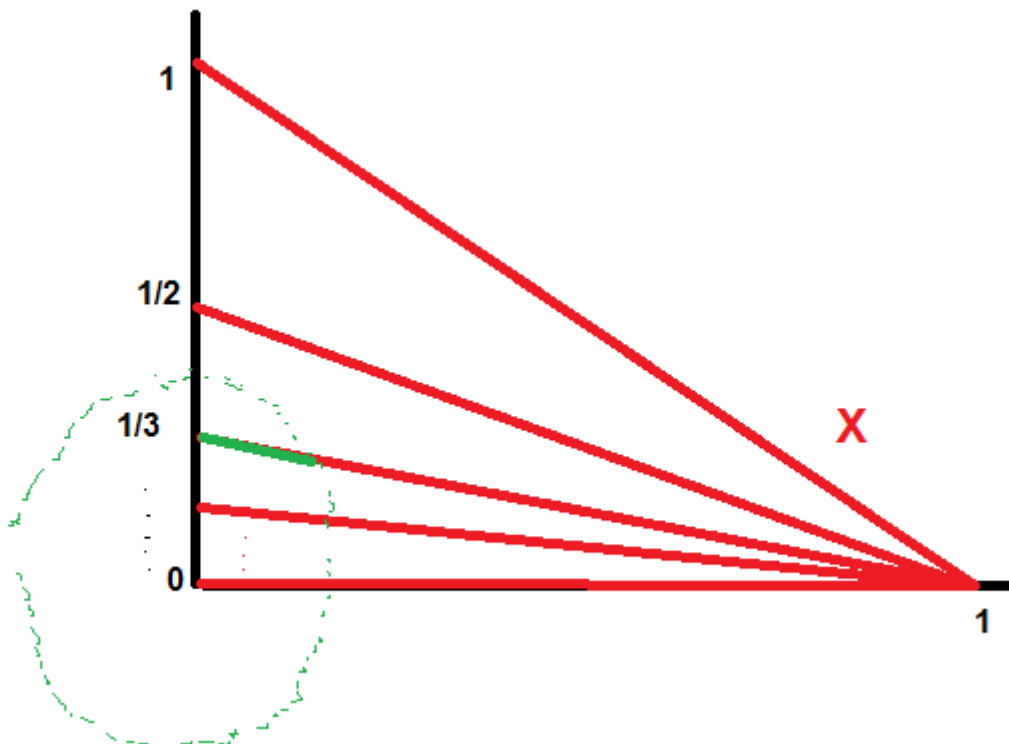
תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. תנו דוגמה של תת מרחב ב- \mathbb{R}^2 שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

פתרון: א. שימוש במשפט: כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכדור פתוח שלו.

ב. פרטים בקובץ <http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TopEx20.pdf>



☺

תרגיל: נניח (X, d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $a, b \in X$ כך ש –

$$\text{diam}(X) = d(a, b)$$

פתרון: $X \times X \in \text{Comp}$ (מכפלה שומרת על קומפקטיות)

ו $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ רציפה כי היא פונקציה ליפשיץ כי

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

קחו בחשבון ש $d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$ מגדירה מטריקה מתאימה לטופולוגיה של $X \times X$.

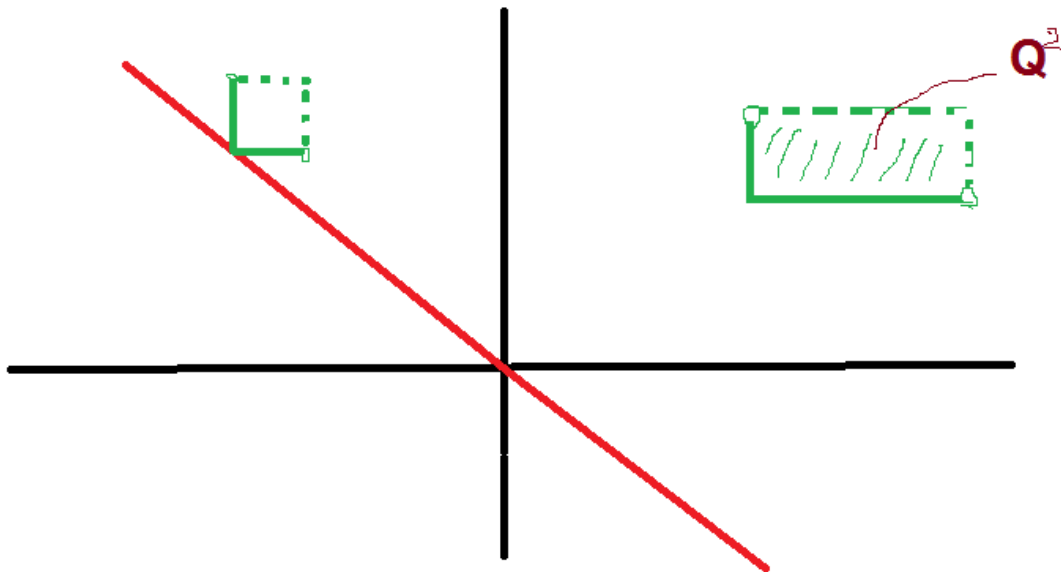
כעת לפי משפט Weierstrass מתקבל המקסימום

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} = \sup d = \max\{d(x, y) : x, y \in X\}$$

☺

תרגיל: "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in \text{Sep}$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

פתרון: $\{[a, a + \varepsilon) \times [b, b + \delta) : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta > 0\}$ בסיס למישור סורגנפראי.



מישור סורגנפראי $(\mathbb{R}, \tau_s)^2$ כן ספרבילי, \mathbb{Q}^2 צפוף בו.

הסיבה היא שכל אלמנט של בסיס פוגש את \mathbb{Q}^2

$$[a, a + \varepsilon) \times [b, b + \delta) \cap \mathbb{Q}^2 \supset (a, a + \varepsilon) \times (b, b + \delta) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$$

$$X := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset (\mathbb{R}, \tau_s)^2$$

אז כל נקודה שלו מבודדת ב X כי

$$[x, x + 1) \times [-x, -x + 1) \cap X = \{(x, -x)\}$$

לכן X דיסקרטי. כל תת קבוצה בה היא סגורה. לכן צפופה בו רק X

עצמו. העוצמה היא עוצמת הממשיים. המסקנה $X \notin \text{Sep}$.



תרגיל: א. לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

ב. לתת תאור גיאומטרי במקרה של $(\mathbb{N}, \tau_{discr})$.

פתרון:

א. נניח נתון (X, τ_{discr}) עם X אינסופי. אז

$$X^* = X \cup \{p\} \text{ נגדיר } \tau^* := \tau_{discr} \cup \{X^* \setminus K : K \text{ is finite}\}$$

שקול להגדיר כך: $\tau^* := \{O \subseteq X^* \mid p \in O \Rightarrow X^* \setminus O \text{ is finite}\}$

ב. במקרה של $X = (\mathbb{N}, \tau_{discr})$ נקבל X^* הומיאורפי למרחב $Y := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

על מנת להוכיח קודם כל נבחר בפונקציה חח"ע ועל $f : \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow X$ ואז נגדיר

$$h : Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow X^* = X \cup \{p\} \quad h(0) = p, h(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$$

הפונקציה היא חח"ע על ורציפה. לכן גם הומיאורפיזם כי $Y \in Comp, X^* \in T_2$

הרציפות: נניח $O \in \tau^*$. יש שני מקרים בלבד:

א. $p \notin O$

ב. $p \in O$

במקרה א נקבל $0 \notin h^{-1}(O)$. וברור ש $h^{-1}(O)$ פתוחה ב $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

במקרה ב $0 \in h^{-1}(O)$ ו $X^* \setminus O$ סופי ו $h^{-1}(O)$ משלים של תת קבוצה סופית ב

$\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. אבל תת קבוצה סופית סגורה בכל מ"מ.

לכן $h^{-1}(O)$ פתוח ב מרחב $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$



תרגיל: מרחב מנה $S^1 \sim S^1/[0,1]$ של גליל $S^1 \times [0,1]$ כשמכווצים את כל הנקודות של בסיס $S^1 \times \{0\}$

לנקודה אחת הומיאורפי לדיסק סגור דו-מימדי.

פתרון: פונקציה $f : S^1 \times [0,1] \rightarrow D^2 \quad f(x,t) = tx$ רציפה על סגורה.



תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X . פונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת "רטרקציה"

retraction אם היא רציפה על כך ש $\forall y \in Y \quad f(y) = y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f \circ f = f$)

פתרון: שימוש במשפט הצימצום (שימו לב שפונקציית הצמצום $f_Y : Y \rightarrow Y$ היא פונקציית זהות.

לכן מנה. אז גם $f : X \rightarrow Y$.

⊙

תרגיל: נניח $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של \mathbb{R}^2).

נגדיר פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x$ (צמצום של הטלה).

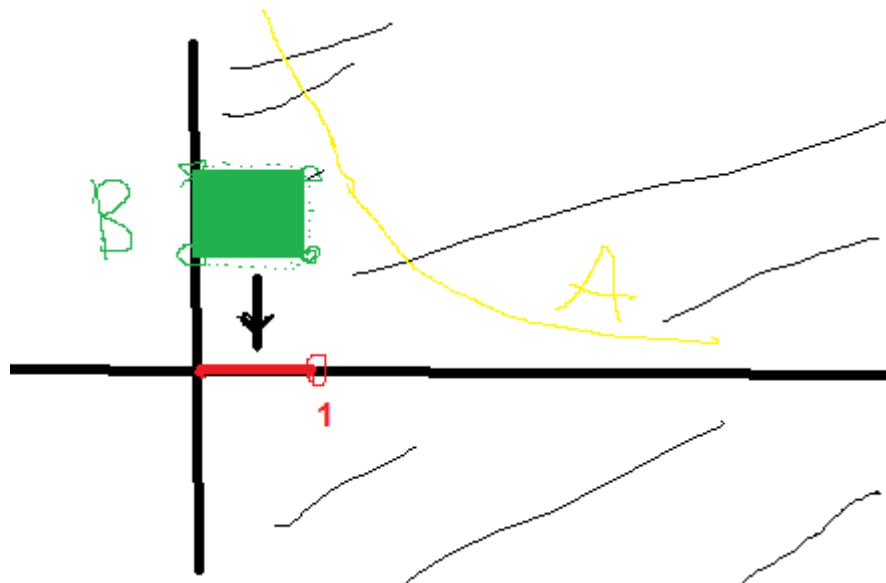
הוכיחו ש f פונקציית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר X מגדיר הומיאומופיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $B := [0, 1) \times (2, 3)$ פתוחה ב X . אבל $f(B) = [0, 1)$ לא פתוחה ב \mathbb{R} .

f לא סגורה: $A := \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$ סגורה ב X . אבל $f(A) = (0, \infty)$ לא סגורה ב \mathbb{R} .



משפטים למבחן:

עיקרון *Heine* במ"מ *

קריטריון סגירות במ"מ

שיכון למרחב *Banach*

קריטריון לרציפות *

כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו

האלומות – תנאי מספיק לקשירות

$$.B_2 \subset Sep$$

אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז $X \in T_{3\frac{1}{2}}$

טופולוגיה חלשה

פתיחות הטלות

נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.

תמונה רציפה שומרת על *Comp*.

הפרדה של תת רבוצות קומפקטיות

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \rightarrow Y$ רציפה. אזי f פונקציה סגורה.

על השיכון והומיאומורפיזם

כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

Heine-Borel

קומפקטיות במרחב מטרי *

משפט טיכונוף

קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

מספר *Lebesgue*

$$LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$$

$$.Metriz \subset T_4$$

למה של *Urysohn*: $T_4 = T_4^{func}$

האוניברסליות של קוביות *Tychonoff*

מטריזציה *

טופולוגיה חזקה

תנאי מספיק למנה "צמצום"

הערה: בהוכחות ארוכות (למשל שמסונות ב *) יתכן שתקבלו רק שלבים מסוימים.