

תרגיל תיאורטי מספר 2

1. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x) = x, g(x) = x^2 + 4x - 3$ חשבו את $\langle f, g \rangle$.

(ב) מצאו בסיס או"ג ל V .

2. יהא $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ממ"פ. נגדיר $S = \{u \in V : \|u\| = 1\}$ (כאשר $\|u\|$ זה הנורמה המושרית). יהא $v \in V, v \neq 0$. הוכיחו כי $\min \{\|v - u\| : u \in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v (כלומר עבור $\tilde{u} = \frac{v}{\|v\|}$).

3. יהא V ממ"פ. ויהא $W \leq V, W \neq \{0\}$ תת מרחב. (בשאלה זאת, מומלץ להיעזר בהטלות).

(א) הוכיחו כי כל $v \in V$ ניתן להצגה כ $v = w + w'$ כאשר $w \in W$ ו $w' \in W^\perp$.

(ב) הוכיחו כי הצגה זאת יחידה. כלומר אם $v = w_1 + w'_1$ כאשר $w_1 \in W$ ו $w'_1 \in W^\perp$ וגם $v = w_2 + w'_2$ כאשר $w_2 \in W$ ו $w'_2 \in W^\perp$ אזי $w'_1 = w'_2$ ו $w_1 = w_2$.

(ג) הוכיחו כי $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

(ד) הוכיחו כי $W = (W^\perp)^\perp$ (היעזרו בסעיפים קודמים)

4. יהא V ממ"פ, ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V . הוכיחו כי אם לכל $v \in V$ מתקיים

$$[\forall i \in \{1, \dots, n\} \langle v, v_i \rangle = 0] \Rightarrow [v = 0]$$

5. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא

אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4$$

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 6$$

אך לצערנו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא

החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$4c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b'_1$$

$$2c_1 + 3c_2 + 3c_3 = b'_2$$

$$4c_1 + 4c_2 + 5c_3 = b'_3$$

$$2c_1 + 5c_2 + 5c_3 = b'_4$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b - b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא

הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על \mathbb{R}^4). מצאו גם אתם את c_1, c_2, c_3 .
 [הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואת $Ax = b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax = b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]