<u>תרגיל</u> תהי $A=\begin{pmatrix}10&1&-1\\2&9&-1\\6&3&5\end{pmatrix}$. מצאו את צורת ג'ורדן J של A ומצאו מטריצה הפיכה P כך ש-
$P^{-1}AP=J$.

<u>פתרון</u> נחשב את הפולינום האופייני:

$$\det\begin{pmatrix}x-10&-1&1\\-2&x-9&1\\-6&-3&x-5\end{pmatrix}=(x-10)(x-9)(x-5)+6+6+6(x-9)+3(x-10)-2(x-5)$$
$$=x^3-24x^2+192x-512$$

קיבלנו $f_A(x)=x^3-24x^2+192x-512$ וכדי לדעת מה השורשים של פולינום זה צריך לפרק אותו לגורמים. יש הרבה דרכים, ננסה למשל למצוא שורשים רציונליים: כזכור שורש רציונלי a/b של פולינום יקיים כי a מחלק את האיבר החופשי ו- b מחלק את המקדם של האיבר המוביל. לכן במקרה שלנו האפשרויות הן $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32,\pm64,\pm128,\pm256,\pm512$. נציב את $\pm1,\pm2,\pm4$ ונראה שהם לא מאפסים את הפולינום. 8 כן מאפס את הפולינום. לכן נבצע חילוק $\frac{x^3-24x^2+192x-512}{x-8}=x^2-16x+64$ וזה פולינום ריבועי עם שורש כפול 8.

לסיכום מצאנו כי $f_A(x)=(x-8)^3$, כלומר למטריצה A יש ע"ע יחיד 8 עם ריבוי אלגברי 3.

הערה: משלב זה מאוד פשוט לחשב את צורת ג'ורדן של A לפי השיטות שלמדנו שבוע שעבר (מציאת פולינום מינימאלי וכו'). אך בכוונה בתרגיל זה נלך בדרך הארוכה, נמצא את P ואז נחשב את צורת ג'ורדן באמצעותה.

נחסר את 8 מהאלכסון הראשי של A כדי לקבל מטריצה נילפוטנטית, נסמנה B:

$B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\6&3&-3\end{pmatrix}$. קל לראות כי $B^2=0$ כלומר B נילפוטנטית מסדר $k=2$ לכן צריך למצוא בסיס ל- $\operatorname{Im}B$ ואז להשלים אותו לבסיס של $KerB$. נשים לב כי $rankB=1$, לכן צריך למצוא וקטור אחד בבסיס, וכמו כן המימד של Ker הוא $3-1=2$ לכן ב- Ker נצטרך למצוא שני וקטורים בת"ל (אחד מהם, יבוא מהוקטור שמצאנו ב- $\operatorname{Im}B$, וסה"כ נצטרך להשלים וקטור זה ע"י וקטור אחד נוסף).

$\operatorname{Im}B=\left\{\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\6&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\mid v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}\right\}$. נבחר למשל $v_1=1,v_2=v_3=0$ ונקבל $Bv=(2,2,6)$, $v=(1,0,0)$. כלומר $(2,2,6)$ פורש את $\operatorname{Im}B$ ונצטרך להשלים אותו לבסיס של $KerB$.

$KerB=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\6&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ כלומר צריך לפתור מערכת משוואות לינאריות הומוגנית.

במקרה זה היא ממש פשוטה כי לאחר דירוג $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\6&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר פתרונות למערכת זו הם כל הוקטורים (x,y,z) כך ש- x,y כלשהם ו- $z=2x+y$. נרצה לבחור וקטור כזה כך שהוא ו- $(2,2,6)$ (הבסיס של $\operatorname{Im}B$) לא יהיו ת"ל, למשל $(0,1,1)$. סה"כ קיבלנו 3 וקטורים, נשים אותם בעמודות מטריצה: $P=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&1\\6&0&1\end{pmatrix}$. וכעת נמצא את צורת ג'ורדן:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-1/4&1/4\\1&1/2&-1/2\\0&3/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&1&-1\\2&9&-1\\6&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\2&0&1\\6&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}=J$$