תרגול 10

קומפקטיות

1. הגדרה: מרחב טופולוגי (X,τ) יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו קיים תת כיסוי סופי. כלומר, אם $X=\bigcup_{i\in I}O_i$, איחוד של קבוצות פתוחות, אז יש תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $X=\bigcup_{i\in J}O_i$

   (א) דוגמא: כל מרחב טופולוגי סופי הוא קומפקטי.

2. הערה: תת מרחב $Y\subseteq X$ יקרא קומפקטי אם הוא קומפקטי כמרחב טופולוגי עם טופולוגיית תת המרחב. זה שקול לתכונה הבאה: אם $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$, כאשר O_i פתוחות בX, אז קיימת תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $Y\subseteq\bigcup_{i\in J}O_i$.

3. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותהא $x_n\to x$ אזי $A=\{x_n\}\cup\{x\}$ היא קבוצה קומפקטית.

   הוכחה: יהא $\{U_i\}$ כיסוי פתוח של A. (כלומר $A\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$). לפי הגדרה של כיסוי, קיים $j\in I$ כך ש $x\in U_j$. כעת מהגדרת התכנסות, קיים N טבעי כך שלכל $n\geq N$, $x_n\in U_j$. לכל $n<N$ נבחר U_n כך ש $x_n\in U_n$. (קיים כזה מהגדרת הכיסוי). לכן $\{U_n\}_{n<N}\cup\{U_j\}$ הוא תת כיסוי סופי.

4. תרגיל: האם $(X,\tau_{co-finite})$. האם היא קומפקטית?

   פתרון: כן. הוכחה: יהא $\{U_i\}$ כיסוי פתוח. נבחר i_0 כדשהו כך ש$U_{i_0}\neq\emptyset$. אזי $U_{i_0}^c$ סופית. נבחר U_j לכסות כל $x\in U_{i_0}^c$ ואז $\{U_{i_0}\}\cup\{U_j\}$ תת כיסוי סופי.

5. תרגיל: האם קבוצה לא בת מניה X עם הטופולוגיה הקו-מניתית היא קומפקטית?

   פתרון: לא. נבחר תת קבוצה בת מניה $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}\subseteq X$, ונבבנה כיסוי פתוח ל$X$ באופן הבא: $O_0=A^c,O_n=A^c\cup\{a_1,...,a_n\}$. כל הקבוצות פתוחות מכיוון שהמשלים שלהן בן מניה, וקל לראות ש $X\subseteq\bigcup O_n$. כמו כן, מתקיים ש $O_0\subseteq O_1\subseteq O_2\subseteq\ldots$, ולכן איחוד סופי יהיה שווה פשוט לאחת מהקבוצות (לקבוצה הגדולה באיחוד), ולא יכיל את X.

6. תרגיל: (X,τ) קומפקטי אמ"מ לכל כיסוי פתוח שלו עם קבוצות פתוחות בסיסיות קיים תת כיסוי פתוח.

   הוכחה: $\Longleftarrow$: ברור.

   $\Longrightarrow$: יהא $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. כל קבוצה בכיסוי היא איחוד של קבוצות פתוחות בסיסיות. כלומר, לכל $i\in I$, קיימת קבוצה J_i של קבוצות פתוחות בסיסיות, כך ש $U_i=\bigcup_{j\in J_i}U_{i,j}$. אזי $\{U_{i,j}\}_{i\in I,j\in J_i}$ הוא כיסוי פתוח של X שמורכב מקבוצות פתוחות בסיסיות. לפי הנתון יש לו תת כיסוי סופי. לכל $U_{i,j}$ מהכיסוי הסופי נבחר U_k מהכיסוי המקורי שמכילה אותה, ואז $\{U_k\}$ הוא תת כיסוי סופי של $\{U_i\}_{i\in I}$.

7. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב קומפקטי ו $A \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אזי A קומפקטית.
הוכחה: יהא $\{U_i\}$ כיסוי פתוח של A אזי $\{U_i\} \cup \{A^c\}$ כיסוי פתוח של X. מקומפקטיות של X יש לו תת כיסוי סופי $\{U_{i_j}\}$ (אולי איחוד עם A^c). כלומר, $X \subseteq (\bigcup U_{i_j}) \cup A^c$.
לכן $A \subseteq \bigcup U_{i_j}$. כלומר, $\{U_{i_j}\}$ הוא תת כיסוי סופי של A.

(א) משפט מההרצאה: במרחב האוסדורף כל תת קבוצה קומפקטית היא סגורה.

8. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ו $Y_1, Y_2 \subseteq X$ תת קבוצות קומפקטיות. האם $Y_1 \cap Y_2$ קומפקטי?
פתרון: באופן כללי - לא. למשל נגדיר את המרחב בטופולוגי הבא: $X = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ עם הטופולוגיה

$$\{O_n = \{-n, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{Z} \cup \{\infty\}\} \cup \{\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}\} \cup \{X, \emptyset\}$$

(בדקו שזוהי אכן טופולוגיה). הקבוצות $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ קומפקטיות. הסבר: בשביל לכסות את $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ צריך שאחת הקבוצות הפתוחות תכיל את ∞. כל קבוצה פתוחה שמכילה את ∞ מכילה גם את $\mathbb{Z}$, ולכן היא בעצמה מהווה תת כיסוי סופי. אותה הוכחה תעבוד גם ל $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
החיתוך שלהם הוא $\mathbb{Z}$ שאינו קומפקטי כי $\{O_n\}$ כיסוי פתוח שלו שאין לו תת כיסוי סופי.

9. תרגיל: אם X הוא T_2 אזי חיתוך של קומפקטיות $\{A_i\}$ הוא קומפקטי $\bigcap A_i$
הוכחה: כל A_i סגורה, כי תת קבוצה קומפקטית של מרחב האוסדרוף היא סגורה. חיתוך כלשהו של סגורות הוא סגור, לכן $\bigcap A_i$ סגור. כמו כן, ובחר A_i מסויים. $\bigcap A_i \subseteq A_i$.
כלומר, תת קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי, לכן לפי תרגיל שעשינו, $\bigcap A_i$ קומפקטית.

10. משפט: X קומפקטי אמ"מ לכל אוסף של תת קבוצות סגורות $\{S_i\}_{i \in I}$ כך ש $\bigcap_{i \in I} S_i = \emptyset$, קיימת תת קבוצה סופית $J \subseteq I$ כך ש $\bigcap_{i \in J} S_i = \emptyset$.

11. תרגיל: אם X הוא מרחב T_2 ו $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$סדרה יורדת של תת קבוצות קומפקטיות לא ריקות (כלומר, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$) אזי $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.
הוכחה: נניח בשלילה ש $\bigcap A_n = \emptyset$. מכיוון ש X הוא T_2, כל תת קבוצה קומפקטית היא סגורה. לכן לכל $n \in \mathbb{N}$, A_n סגורה. בנוסף, לכל n, $A_n \subseteq A_1$, וA_1 קומפקטי. לכן יש לנו אוסף של קבוצות סגורות בתוך מרחב קומפקטי, שהחיתוך שלהן ריק. מהמשפט הקודם, יש מספר סופי מתוכן שהחיתוך שלהן ריק. אבל נשים לב שאם נחתוך מס' סופי של קבוצות, אזי מכיוון שהן מוכלות אחת בשניה, החיתוך שווה לקבוצה הקטנה מבניהן. אבל נתן שכל הקבוצות לא ריקות. סתירה.

12. תרגיל: אם X הוא מרחב T_2 אזי סדרה יורדת של $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ של תת קבוצות סגורות לא ריקות יכולה לקיים כי החיתוך $\bigcap S_n$ ריק. (כלומר, בתרגיל הקודם, הדרישה של הקומפקטיות נחוצה.)
דוגמא: נקח את $X = (0,\infty)$ עם הטופולוגיה המושרית מ$\mathbb{R}$, ו $S_n = (0, \frac{1}{n}]$. זאת סדרה יורדת של קבוצות סגורות בX שהחיתוך שלה ריק.

13. תרגיל: הוכיחו את הטענה הבאה: תמונה רציפה של קומפקטית היא קומפקטית. כלומר, אם $f : X \to Y$ פונקציה רציפה ועל, וX קומפקטי, אז גם Y קומפקטי.
הוכחה: יהא $\{U_i\}$ כיסוי פתוח של Y. אזי $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup U_i) = \bigcup f^{-1}(U_i)$.
מכיוון שf רציפה, $\{f^{-1}(U_i)\}$ הוא כיסוי פתוח של X. לכן יש לו תת כיסוי סופי $\{f^{-1}(U_{i_j})\}$.
מכיוון שf על, $f(f^{-1}(U_{i_j})) = U_{i_j}$. נטען כי $\{U_{i_j}\}$ הוא תת כיסוי של Y. אכן

$$Y = f(X) = f(\bigcup f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup f(f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup U_{i_j}$$

14. תרגיל: פונקציה רציפה מקומפקטי להאוסדורף היא פונקציה סגורה. כלומר, אם $f : X \to Y$ רציפה, X קומפקטי וY האוסדורף, אז f סגורה. (תזכורת, f נקראת סגורה אם לכל $A \subseteq X$ סגרוה מתקיים כי $f(A)$ סגורה בY)
הוכחה: תהא A סגורה ב X. מכיוון שX קומפקטי, נקבל שA קומפקטית. לכן $f(A)$ קומפקטית בY. אבל במרחב האוסדורף כל תת קבוצה קומפקטית היא סגורה.

(א) מסקנה: כל פונקציה הפיכה ורציפה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף היא הומיאומורפיזם.

15. תרגיל: יהא (X,τ) מרחב קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו שאם $\tau \subsetneqq \tau'$ טופולוגיה על X, אזי (X,τ') לא קומפקטי ואם $\tau' \subsetneqq \tau$ טופולוגיה על X, אזי (X,τ') לא האוסדורף.
הוכחה: אם $\tau \subsetneqq \tau'$ אזי (X,τ') לא קומפקטי: נבחר $O \in \tau' \backslash \tau$ ונניח בשלילה כי (X,τ') קומפקטי. אזי $Id : (X,\tau') \to (X,\tau)$ הפיכה ורציפה. מכיוון שזאת פונקציה רציפה מקומפקטי להאוסדורף, היא סגורה. פונקציה הפיכה, רציפה וסגורה היא הומיאומורפיזם. אבל Id לא פתוחה, כי $Id(O) = O$, שאינו פתוח בτ.
אם $\tau' \subsetneqq \tau$ אזי X,τ' לא האוסדרוף: נבחר $O \in \tau \backslash \tau'$ ונניח בשלילה כי (X,τ') הוא האוסדרוף. אזי $Id : (X,\tau) \to (X,\tau')$ הפיכה ורציפה. כל פונקצציה רציפה מקומפקטי להאוסדרוף היא סגורה, לכן Id גם סגורה. כלומר, היא הומיאומורפיזם. אבל היא לא פתוחה כי $I(O) = O$ שאינו פתוח בτ'.

16. משפט: $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה ו X קומפקטי יש ל$f[X]$ מקסימום ומינימום.
הוכחה: $f(X)$ קומפקטית (כתמונה רציפה של קומפקטי), לכן היא סגורה וחסומה (תת קבוצה קומפקטית של $\mathbb{R}$ היא סגורה חסומה). ולכן יש לה מקסימום ומינימום (מאינפי 1).

17. תרגיל: יהא X מרחב טופולוגי, $A \subseteq X$ תת קבוצה קומפקטית ו $x \in X \backslash A$. אזי קיימת a כך ש $d(x,A) = d(x,a)$.
הוכחה: נגדיר $f : A \to \mathbb{R}$ ע"י $f(a) = d(x,a)$. זאת פונקציה רציפה מA ל$\mathbb{R}$, ולכן יש לה מינימום. כלומר, קיים $a \in A$ כך ש$f(a) = \min_{a' \in A}\{f(a')\}$.
כלומר, $d(a,x) = \min_{a' \in A} d(a',x) = d(x,A)$.