תרגיל 13

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים ו־$f:X\to Y$. בנוסף, נניח ש־$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ כיסוי סגור של X וש־$f(A_i)$ סגורה לכל $1\leq i\leq n$. אז אם $f_{|A_i}$ סגורה לכל $1\leq i\leq n$ אז f סגורה.

2. הוכיחו ש־$\mathbb{R}$ כאשר מכווצים את $[0,1]$ לנקודה עדיין הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.

3. נסתכל על הגליל $X:=S\times[0,1]$ ונגדיר יחס $\sim$ על ידי

$$(x,\alpha)\sim(y,\beta)\iff \alpha=\beta=0\vee\Big(\alpha=\beta\wedge x=y\Big)$$

כלומר, מדביקים את נקודות הבסיס $S\times\{0\}$ יחד. הראו ש־$X/\sim$ הומיאומורפי לדיסק סגור דו ממדי.

4. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y\subseteq X$. נגדיר רטרקציה (משיכה) כפונקציה רציפה $f:X\to Y$ כך שלכל $y\in Y$ מתקיים $f(y)=y$. הראו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

5. נגדיר יחס שקילות על הספירה

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

לפי

$$(x,y,z)\sim(x',y',z')\iff(x,y)=(x',y')$$

הראו ש־

$$S^2/\sim\cong D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\}$$

6. הראו ש־$\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ היא פונקציית מנה.

7. נסתכל על $X=\{0,1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי $\tau=\{X,\emptyset,\{0\}\}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $I=[0,1]$ לפי

$$x\sim y \iff \Big(x,y\in[0,\frac{1}{2})\Big)\vee\Big(x,y\in[\frac{1}{2},1]\Big)$$

8. הוכיחו או הפריכו: כל פולינום $p:\mathbb{R}\to p(\mathbb{R})$ הוא פונקציית מנה.
<u>בונוס:</u> האם זה נכון גם מעל $\mathbb{C}$

9. נסתכל על $X:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ועל יחס השקילות $\sim$ שמוגדר על ידי

$$(x,y)\sim(x',y') \iff \exists\alpha>0:(x,y)=\alpha(x',y')$$

הראו ש־$S\cong X/\sim$ כאשר $S\subseteq\mathbb{R}^2$ הוא הספרה.

1 שאלות סיכום

1. הוכיחו או הפריכו: אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ו־$f:X\to X$ היא פונקציית ליפשיץ עם מקדם 1, אז יש ל־f נקודת שבת.

2. יהי (X,τ) מרחב קומפקטי
   (א) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מקומית אז הוא גם קשיר
   (ב) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מסילתית מקומית אז הוא גם קשיר מסילתית

3. יהי $(P,<)$ מרחב סדור לינארית. הוכיחו ש־P קומפקטי עם טופולוגיית הסדר אם ורק אם לכל תת קבוצה לא ריקה יש $\sup$ ו־$\inf$, כלומר חסם עליון קטן ביותר וחסם תחתון גדול ביותר.