תרגיל 4 – בדידה

1. תרגיל ממבחן (סויפר תשס"ח): תהי קבוצה X , תהי פונקציה $f:X\to X$ ויהיו קבוצות $A,B\subseteq X$. הוכח/הפרך: $f(A\setminus B^C)=f(A)\setminus\left[f(B)\right]^C$

באופן כללי ידוע כי $X\setminus Y=X\cap Y^C$, ולכן במקרה זה אנו נדרשים להוכיח או להפריך $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

נפריך את הטענה: $f(n)=2n$ ונגדיר את A להיות קבוצת הזוגיים ו B קבוצת האי זוגיים.

החיתוך בינהם הוא ריק, אבל חיתוך התמונות מכיל את כל המספרים שמתחלקים ב4.

2. תרגיל ממבחן (אפי כהן ואלי בגנו תשס"ט): יהיו A,B קבוצות לא ריקות ותהי $f:A\to B$ פונקציה חח"ע ועל. מצא בפירוש פונקציה חח"ע ועל מ $P(B)$ ל $P(A)$ והוכח שהיא אכן כזו.

תהי $Y\subseteq B$ נגדיר $g(Y):=\left\{f(y):y\in Y\right\}$. נניח ו $g(C)=g(D)$ לכן

$c\in D\Leftrightarrow f(c)\in g(D)\Leftrightarrow f(c)\in g(C)\Leftrightarrow c\in C$. האם"ם החיצוניים הם בזכות ש f חח"ע, אחרת $f(c)\in g(C)$ לא גורר $c\in C$ כי ייתכן שקיים איבר אחר $x\in C$ כך ש $f(x)=f(c)$.

לכן g חח"ע. נוכיח כי היא על: תהי $X\subseteq A$ אזי ניקח את קבוצת המקורות $Y=f^{-1}[X]$. מכיוון ש f על לכל איבר ב X יש מקור ולכן $g(Y)=X$ כפי שרצינו.

3. תהי $f:X\to Y$ פונקציה, ותהי $g:P(Y)\to P(X)$ הפונקציה המוגדרת על ידי $g(B)=f^{-1}[B]$. הוכח/הפרך: $A\in im(g)$ אם"ם $f^{-1}[f[A]]=A$

הכיוון הראשון טריוויאלי שכן אם $f^{-1}(f(A))=A$ אזי לפי הגדרה $g[f[A]]=A$ ולכן $A\in im(g)$.

בכיוון השני, נניח $A\in im(g)$ לכן קיימת B כך ש $g(B)=A$. לפי הגדרה $f^{-1}[f[A]]=\{a\in A: f(a)\in f[A]\}$ ברור אם כך ש $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$. נניח בשלילה שהם לא שווים, לכן קיים $x\notin A$ כך ש $f(x)\in f[A]$. אבל לפי ההגדרה של $f[A]$ קיים $a\in A$ כך ש $f(x)=f(a)$.

לכן, אם $A=g(B)=f^{-1}[B]=\{a\in A: f(a)\in B\}$ אזי $f(x)=f(a)\in B$ ולכן $x\in f^{-1}[B]=A$ בסתירה.

4. תרגיל ממבחן (אפי כהן ואלי בגנו תשס"ט): תהי A קבוצה. תהי $B\subseteq P(A)$ כך שלכל $S,T\in B$ מתקיים $S=T$ או $S\cap T=\phi$. נניח עוד כי קיימת פונקציה $f:B\to A$ המקיימת $\forall S\in B: f(S)\in S$. הוכח/הפרך:

   a. f חח"ע
   b. f על

נניח $f(S)=f(T)=x$. לפי הגדרה $\left(f(S)\in S\right)\wedge\left(f(T)\in T\right)$ ולכן $x\in S\cap T$ ולכן החיתוך לא ריק ולכן $S=T$. לכן הוכחנו שהפונקציה חח"ע.

אין שום סיבה שהפונקציה תהא על, כיוון שייתכן מאד ו B לא מכילה קבוצות שאיחודן נותן את A בכלל. למשל $A=\{1,2\}, B=\{\{1\}\}, f(\{1\})=1$. ל2 אין מקור. לכן הפונקציה לא בהכרח על.

5. תרגיל ממבחן (שי סרוסי ואלי בגנו תשס"ח): תהי A לא ריקה כך ש $|A| \ge 2$. נגדיר פונקציה $f: A \times P(A) \to P(P(A))$ על ידי $f(x,U) = \{V \subseteq U \mid x \in V\}$. הוכח/הפרך:

a. f על

b. f חח"ע

c. $f(x,U \cap V) = f(x,U) \cap f(x,V)$

d. $f(x,U \cup V) = f(x,U) \cup f(x,V)$

- הפרכה: ניקח $A = \{1,2\}$. אם $f(x,U)$ אינה ריקה, החיתוך הכללי עליה מכיל את x ולכן לא ריק. לכן אין מקור ל $\{\{1\},\{2\}\} \in P(P(A))$ כיוון שהחיתוך על קבוצה זו ריק והיא אינה ריקה. לכן הפונקציה אינה על. (ניתן לראות שאפשר לבנות הוכחה כללית לכך שהפונקציה אינה על, זה יותר ממה שדרוש עבור הפרכה).
- הפרכה: ניקח $A = \{1,2,3\}$. קל לראות ש $f(1,\{2\}) = f(1,\{2,3\}) = \{\ \}$ ולכן הפונקציה אינה חח"ע.
- הוכחה:

$$B \in f(x,U \cap V) \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (B \subseteq U \cap V) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x \in B) \wedge (B \subseteq U)] \wedge [(x \in B) \wedge (B \subseteq V)] \Leftrightarrow B \in f(x,U) \cap f(x,V)$$

- הפרכה: ניקח $A = \{1,2,3\}, x = 1, U = \{1,2\}, V = \{3\}$

מתקיים $\{1,2,3\} \in f(1,U \cup V)$ אבל $(\{1,2,3\} \notin f(x,U)) \wedge (\{1,2,3\} \notin f(x,V))$

6. * מצא פונקציות $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (יחסים חד ערכיים ושלמים על הממשיים) כך ש g אינה על, אך ההרכבה $f \circ g$ הינה על.

ניקח פונקציה g השולחת את הממשיים לקטע הסופי $[0,1]$ וניקח f השולחת קטע זה לכל הממשיים. למדנו כיצד לבנות פונקציה כזו.