ב"ש אנליזה 1 תשעח מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin(x)\cos(x)\right)}{\ln(1+2x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin(x)\cos(x)\right)}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin(x)\cos(x)\right)}{\sin(x)\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)\cos(x)}{x}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{x}{2x}\\ &= 1\cdot 1\cos(0)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2e^{-2x}}{e^{2x}+x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2e^{-2x}}{e^{2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{-2x}}{e^{2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x\left(e^x+\frac{x}{e^x}\right)}+\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{-2x}}{e^{2x}+x}=\{\frac{1}{\infty+0}+\frac{0}{\infty}\}=0+0=0$$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n n^2}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{n!}{2^n n^2}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}\left(n+1\right)^2}\cdot\frac{2^n n^2}{n!}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{2^n n^2}{2^{n+1}\left(n+1\right)^2}=(n+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to\infty\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2=\infty$$

וכיוון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\infty$ גם $a_n\to\infty$.

2. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$ וכן נתון $a_1=1$.

(א) הוכיחו כי a_n סדרה עולה.

פתרון: טענה: הסדרה חסומה מלמעלה ע"י 2, כלומר לכל n טבעי $a_n\le 2$.

הוכחה באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: אכן $a_1=1\le 2$
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n\le 2$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1}\le 2$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1\le\frac{2}{2}+1=2$$

כעת, לכל n, לפי הגדרה הסדרה $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$ ולכן

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{2}-a_n+1=1-\frac{1}{2}a_n\geq 1-\frac{1}{2}\cdot 2=0$$

ולכן $a_{n+1}\geq a_n$, כלומר הסדרה עולה כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו כי הסדרה חסומה וחשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

פתרון: הוכחנו שהסדרה עולה וחסומה מלמעלה ע"י 2 ולכן מתכנסת לגבול סופי L. כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$. מהגדרת הסדרה נקבל

$$L\leftarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1\to\frac{L}{2}+1$$

ולכן $L=\frac{L}{2}+1$. נעביר אגף לקבל $\frac{L}{2}=1$ ולכן $L=2$ וזהו גבול הסדרה.

3. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{ax} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{ax}=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{a}$$

ולכן רק עבור a המקיים $a=\frac{1}{a}$ מתקיים השיוויון הדרוש. כלומר $a^2=1$ ולכן $a=\pm 1$.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=\pm 1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב: עבור $a=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

עבור $a=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{-x}-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{-x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

כלומר $f'(0)$ בשני המקרים ומתקיים $f'(0)=\pm\frac{1}{2}$ במקרה של $a=\pm 1$.

.4

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\ln(2+x) = x$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = \ln(2+x) - x$$

שמוגדרת רק עבור $-2 < x$ ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} - 1 = \frac{-x-1}{2+x} = -\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$$

ולכן f' מתאפסת רק ב -1 ולא מוגדרת רק ב -2. לפי הטבלה

x	-2	-1.5	-1	0
$f'(x)$	UD	$+$	0	$-$

נסיק שהפונקציה f יורדת ממש בקרן $(-1,\infty)$ ועולה ממש ב $(-2,-1)$ ולכן יש לה בקרן/קטע אלו לכל היותר שורש יחיד ל f (בכל אחת). בנוסף, -1 נקודת מקסימום של f והערך בה הוא $f(-1) = 1$. מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(2+x) - x = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln(2+x)}{x} - 1\right) = \{\infty\cdot(0-1)\} = -\infty$$

(כאשר מתבססים על $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2+x}}{1} = 0$) ולכן קיימת $-1 < d$ כך ש $f(d) < 0$ לכן בקטע $[-1,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ומכיוון שהיא רציפה בקטע היא מקבלת ערך 0 לפי משפט ערך הביניים ולכן ל f יש שורש יחיד ב $(-1,\infty)$. מתקיים גם

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \ln(2+x) - x = \{-\infty + 2\} = -\infty$$

ולכן קיימת $-2 < c < -1$ עבורה $f(c) < 0$. לכן בקטע $[c,-1]$ יש ל f עוד שורש אחד בדיוק (כמו קודם, f רציפה בקטע ומחליפה סימן + משפט ערך הביניים + עולה ממש שמה). לכן בסה"כ יש 2 פתרונות למשוואה שבשאלה.

(ב) האם קיים פתרון $x > 0$ למשוואה $\sqrt[x]{2+x} = e$?

פתרון: נכתוב את המשוואה

$$(2+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ובאופן שקול, נוציא ln משני האגפים, לקבל $\ln(2+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e$ שזה השיוויון

$$\frac{\ln(2+x)}{x} = 1$$

או

$$\ln(2+x) = x$$

שזה השיוויון מסעיף קודם שראינו שיש לו 2 פתרונות. אחד בקטע $(-2,-1)$ ואחד ב $(-1,\infty)$. הפתרון ב $(-2,-1)$ שלילי ולכן לא פתרון למשוואה שבשאלה שדורשת $x > 0$. בנוסף עבור $f(x) = \ln(2+x) - x$ מתקיים $f(0) = \ln(2) > 0$ ומכיוון שראינו שבקרן $(-1,\infty)$ הפונקציה f יורדת נסיק שהפתרון נמצא בקטע $(0,\infty)$ (שהרי ראינו שהגבול באינסוף הוא $-\infty$) ולכן הוא כן פתרון למשוואה שבסעיף זה וסה"כ נקבל שיש פתרון אחד.

5. תהא f פונקציה המקיימת $f'(x) < 2$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובנוסף מקיימת $f(0) = 0$

(א) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים כי $\frac{f(x)}{x} < 2$.

פתרון: לפי משפט לגרנז' כיוון ש f רציפה (בגלל שגזירה) בקטע $[0,x]$ (לכל x) וגזירה ב $(0,x)$ אזי קיים $0 < c < x$ כך ש

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

אבל כיוון שנתון ש $f'(x) < 2$ לכל x וגם $f(0) = 0$ נקבל

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) < 2$$

כמו שרצינו

(ב) חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x) - 3x$.

פתרון: לפי סעיף קודם נקבל ש

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 3\right) \leq \lim_{x\to\infty} x\,(2-3) = \{\infty \cdot (-1)\} = -\infty$$

ולכן, לפי חצי סנוויץ גם הגבול בשאלה הוא $-\infty$.