יהי B מרחב קשיר מסילתית מקומית ופשוט קשר מקומית.
רוצים למצוא את הטופולוגיה של ההרמה E.
נגדיר את $A=\{\gamma:I\to B|\gamma(0)=b\}$(כלומר כל המסילות ב$B$ שמתחילות בb) ואת E כמחלקות השקילות ההומוטופית של A. הנקודות בE הן מחלקות שקילות של מסילות בb, ונסמן אותן ב$\{\gamma\}$(כאשר $\gamma:I\to B$ הנציג)
ניקח $H\subseteq\pi_1(B,b)$ ונרצה לבנות הרמה שהחבורה היסודית שלה היא H.
$\gamma\equiv\delta$ אם $\gamma(1)=\delta(1)$. $\left[\gamma*\overline{\delta}\right]\in H$.
נגדיר $p:E\to B$ ע"י $p(\{\gamma\})=\gamma(1)$(כאשר $\{\gamma\}$ מחלקת שקילות של כל המסילות ההומוטופיות בH שמסתיימות באותה נקודה)
סביבה מצויינת היא סביבה קשירה מסילתית שכל לולאה בה היא נול־הומוטופית במרחב הגדול. כל תת סביבה של סביבה מצויינת גם היא סביבה מצויינת.
ניקח קבוצת בסיס של סביבות מצויינות ונגדיר:
בהינתן מסילה γ עם $\gamma(0)=b$ ובהנתן סביבה מצויינת של $\gamma(1)$, נגדיר קבוצה בE באופן הבא: כל המסילות שמתחילות בγ ומשורשרות למסילה כלשהי בסביבה המצויינת.
כלומר לכל זוג (γ,u) כאשר γ מסילה בB עם $\gamma(0)=b$ וu סביבה מצויינת של $\gamma(1)$ נגדיר קבוצה בA(ולכן עם יחס שקילות מוגדרת גם קבוצה בE) ע"י

$$Q=\left\{\gamma*\delta\middle|\begin{array}{c}\delta:I\to u\\ \delta(0)=\gamma(1)\end{array}\right\}$$

עכשיו, $Q/_{\equiv}\subseteq E$, שכן לשני איברים בQ תהיה אותה נקודת סיום אם לδ שלהן אותה נקודת סיום - שכן הδ הן בQ ולכן הומוטופיות.
ככה אפשר להגדיר את כל הQ האלה כבסיס לטופולוגיה של E.
ומה החבורה היסודית? היא בדיוק H!
צריך להראות שההרמה של מסילה היא מסילה סגורה $\iff$ היא בH.
איך נראית ההרמה של $\gamma:I\to B$? כלומר איך נראית $\widehat{\gamma}:I\to E$? נקודה בE היא מחלקת שקילות של מסילות בB. נקודת הבסיס בE תהיה $b\equiv\gamma(0)$. $e=\{k_b\}$(כלומר מחלקת השקילות של המסילה הקבועה שמתחילה בb). בהנתן $\gamma:I\to B$ עם $\gamma(0)=b$ נבנה את $\widehat{\gamma}$ באופן הבא:

$$\widehat{\gamma}^e(t)=\{\varphi:I\to B\text{ defined by }\varphi(s)=\gamma(ts),0\leq s\leq1\}$$

מתי מסילה בA היא נציג של המסילה בE? (קבוצת כל הלולאות בH)$=\{k_b\}=e$(שכן $\gamma\equiv k_b$ אם"ם $\gamma(1)=k_b(1)=b$ וגם $\left[\gamma*\overline{k_b}\right]=[\gamma]\in H$) ולכן נקודת הסיום של לולאה היא מחלקה שלה עצמה, ולכן אם הרמה של מסילה מסתיימת בנקודת הבסיס אז היא בH.
זה אומר שH היא בדיוק החבורה היסודית.

יוצרים של חבורה יסודית של עצים

יש לנו גרף, ואנחנו רוצים למצוא יוצרים על החבורה היסודית של הגרף. בחרנו קודקוד מסויים ויצרנו עץ פורש. כל צלע נוספת מעבר לעץ הפורש(צריך לבחור כיוון) מייצגת יוצר חופשי: מתחילים בשורש העץ, הולכים במסלול היחיד לתחילת הצלע, עוברים על הצלע, וחוזרים במסלול היחיד עד לשורש.

שאלה: אם מדביקים דיסקים מה זה עושה ליוצרים?

כל דיסק שמדביקים, רואים איזו מילה זה ביוצרים - וזה יוסיף יחס לחבורה היסודית.

השפה של הדיסק היא מעגל, ואותו מעגל מודבק למעגל בגרף - אם את המעגל הזה ניתן לבטא באמצעות מילה של יוצרים(ותמיד ניתן) - נגיד $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ - אז אותה מילה היא יחס בחבורה היסודית: $\langle x_1,x_2,\dots x_n|\dots,x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=e,\dots\rangle$(ובקיצור כותבים $\langle x_1,x_2,\dots x_n|\dots,x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k},\dots\rangle$)

שאלות משיעורי בית

שאלה

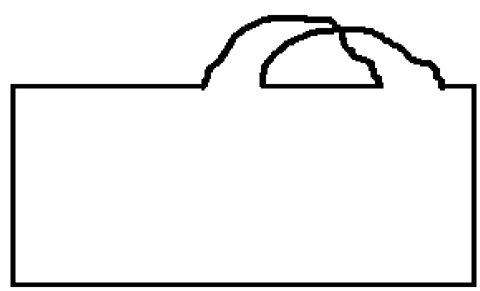
F משטח שמכיל טבעת מוביוס. צ"ל $F\#T\cong F\#K$

פתרון

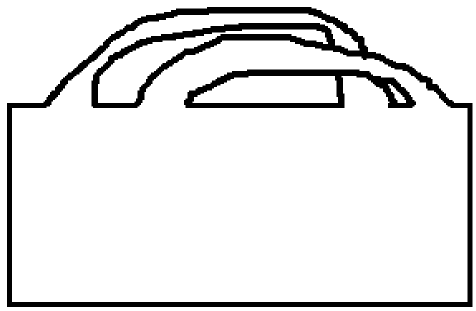
אם יש לנו "מרחב מזוודה" - כלומר דיסק עם רצועה - אז אפשר להזיז נקודת חיבור אחת של הרצועה, אבל אם יש לנו עוד רצועה אי אפשר להזיז את נקודת החיבור של אחת מהן כך שתחתוך את השנייה - למרות שאפשר להזיז אותה **על** הרצועה השנייה כך שתהיה **מעבר** לה.

עכשיו, אם יש לנו רצועה עם חצי סיבוב("רצועת מוביוס") ורצועה רגילה, ומעבירים את נקודת החיבור הרצועה הרגילה על רצועת המוביוס - אז הרצועה הרגילה "חותכת"(בלי להיפגש) את רצועה המוביוס - ומקבלים שתי רצועות מוביוס שחותכות אחת את השנייה. אבל אפשר להמשיך ולהעביר את נקודת החיבור הלאה לאורך השפה, ואז היא תסתובב שוב ותגיע לצד השני.

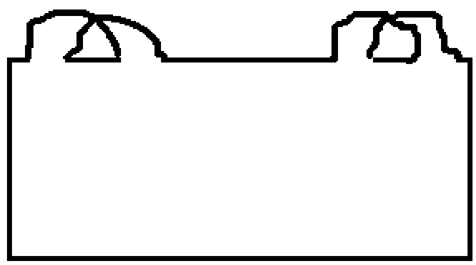
עכשיו:



$F =$,

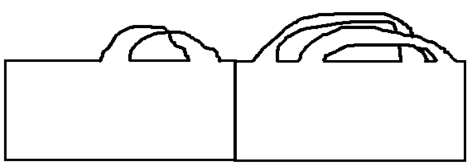


$T =$

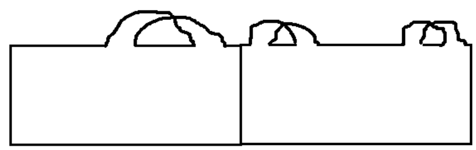


$K =$ ו

וצריך להוכיח



$\cong$



ואת זה אפשר לבצע עם הזזות כאלה.

דרך אחרת

$F\#T$ זה כמו להוסיף צינור ישר, ו$F\#K$ זה כמו להוסיף צינור שצד אחד שלו הפוך מהצד השני. אבל את ההיפוך של הצינור אפשר להפוך באמצעות טבעת המוביוס.

זה בעצם אותו רעיון של הזזת הרצועות ־ רק שחוסכים את ההדבקה של הדיסקים אחר כך.

שאלה 2 מתרגיל 10

המרחב שלנו הוא בעצם גליל בלי המכסים.

לוקחים את החור ומזיזים אותו דרך הצד עד שהוא נפגש עם החור השני(אפשרי בגלל שכל שתי נקודות מקבילות על השפות מזוהות) ומקבלים ככה טבעת מוביוס

שאלה 3 מתרגיל 10

יש משטח סגור F, מוציאים ממנו דיסק, ומזהים כל שתי נקודות נגדיות על השפה. צריך להוכיח שמה שמתקבל זה $F\#P$.

אבל מה שעשו זה בדיוק כמו לקחת את F, להדביק את P, ולכווץ לפי הזיהוי.

שאלה 3 תרגיל 11

צ"ל ש$\mathbb{R}^2$ מרחב כיסוי של T.

נגדיר $p:\mathbb{R}^2\to T$ ע"י $p(\theta,t)=\left(e^{2\pi i\theta},e^{2\pi it}\right)$. אבל $\begin{array}{c} p_1\circ p:\mathbb{R}\to S^1 \\ p_2\circ p:\mathbb{R}\to S^1 \end{array}$ העתקות כיסוי $\Longleftarrow$ p העתקת כיסוי.

הערת בונוס

כל המשטחים הסגורים שאנו מכירים מלבד S^2 וP, הכיסוי האוניברסלי שלהם הוא $\mathbb{R}^2$.