בוחן 2 בקורס מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות. לאחר מכן יינתנו 15 דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: אסור.

בהצלחה!

שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהי R תחום אוקלידי עם פונקציה אוקלידית d, ויהיו $0 \neq a, b \in R$. אז $a \sim b$ אם ורק אם $d(a) = d(b)$. (20 נקודות)

ב. יהי R תחום שלמות. אם $p \in R$ הוא איבר ראשוני, אז p הוא איבר ראשוני ב-$R[x]$. (20 נקודות)

שאלה 2.

א. מצאו שני פירוקים לא שקולים של 8 ב-$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$, והסיקו כי $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$ אינו תחום פריקות יחידה. (20 נקודות)

ב. החוג $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ הוא דווקא כן תחום פריקות יחידה (אין צורך להוכיח את זה). הסבירו מדוע הפירוקים שמצאתם בסעיף א' לא סותרים את העובדה הזו, ומצאו את הפירוק של 8 למכפלה של גורמים אי-פריקים בחוג $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$. (20 נקודות)

שאלה 3. יהי R תחום שלמות, ותהי $S \subseteq R$ תת-קבוצה סגורה לכפל כך ש-$0 \notin S$ ו-$1 \in S$. הראו שכל אידאל $J \lhd S^{-1}R$ הוא מהצורה

$$J = S^{-1}I = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$$

לאיזשהו אידאל $I \lhd R$ כך ש-$I \cap S = \varnothing$, ושאם J ראשוני אפשר לבחור את I להיות ראשוני.
(רמז: הראו כי $\frac{r}{s} \in J$ אם ורק אם $\frac{r}{1} \in J$.) (30 נקודות)