

מבחן בקורס 88-311 שדות ותורת גלואה

מועד א', תשפ"ב

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגל: גיא בלשר

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. לכל השאלות משקל שווה. ענו על כל שאלה שבחרתם פתרון מלא ומנומק. כתבו את תשובותיכם במחברת הבחינה. התחילו את התשובה לכל שאלה בעמוד נפרד, וציינו בתחילת כל עמוד את מספר השאלה המתאימה. משך המבחן: שעתיים וחצי. חומר עזר מותר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1. יהי F שדה, יהי p מספר ראשוני, יהי $f \in F[x]$ פולינום ממעלה p , ויהי K שדה הפיצול של f . נניח כי $[K : F] = tp$ לאיזשהו $t > 1$ טבעי.

א. (12 נק') הוכיחו כי f אי-פריק מעל F .

ב. (13 נק') הוכיחו כי ההרחבה K/F ספרבילית.

שאלה 2. (25 נק') הוכיחו או הפריכו: יהי F שדה, ותהי $E = F(\alpha)$ הרחבה סופית של F . נניח כי $[E : F]$ אינו מתחלק ב-2 וב-3. אז $E = F(\alpha^3)$.

שאלה 3. יהי $f(x) = x^3 - 10 \in F[x]$. חשבו את חבורת גלואה של שדה הפיצול של f מעל F , במקרים הבאים:

א. (13 נק') $F = \mathbb{Q}$.

ב. (12 נק') $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

שאלה 4.

א. (13 נק') קבעו והוכיחו אילו מן הזוויות הבאות ניתנות לבנייה במחוגה וסרגל: $1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$.

ב. (12 נק') יהי F שדה ממאפיין שונה מ-2. הוכיחו שאם $\zeta_{2m+1} \in F$, אז קיים

גם $\zeta_{2(2m+1)} \in F$.

(כאן ζ_n מסמן שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n .)

שאלה 5. יהי F שדה, יהי $f(x) = (x^2 - a)(x^2 - b) \in F[x]$ פולינום (כאשר $a, b \in F$), ויהי K שדה הפיצול של f מעל F . קבעו מהן האפשרויות ל- $[K : F]$, כאשר:

א. (7 נק') $F = \mathbb{Q}$.

ב. (6 נק') $F = \mathbb{F}_2$.

ג. (6 נק') $F = \mathbb{F}_4$.

ד. (6 נק') $F = \mathbb{F}_{11}$.