בעיות NP-שלמות:

- SAT - נתונה נוסחת CNF, צריך לבדוק אם יש הצבה שמספקת אותה. זו הבעיה היסודית, שהוכחה כNPC במשפט קוק
- $3SAT$ - כמו SAT, כאשר הנוסחה בנויה מרכיבים של 3 איברים.
- Independent Set(IS) - האם קיימת בגרף קבוצת קודקודים בגודל k שאין ביניהם קשתות.
- Vertex Cover
- Dominating Set
- Set Cover
- Set Packing
- 3-Colorablity$(3COL)$
- Directed Hamiltonian Cycle(DHC)

תרגיל

נסתכל בבעיית $4COL$. האם הבעיה בP? NP-שלמה?

פתרון

מובן שהבעייה בNP(ננחש צביעה ונבדוק אם היא נכונה)

ננסה להראות רדוקציה $3COL \leq_p 4COL$. כלומר בהינתן G קלט עבור $3COL$ נרצה לבנות G' עבור $4COL$ כך שיתקיים

$$G \in 3COL \Leftrightarrow G' \in 4COL$$

הבנייה

ניקח את G' להיות G בתוספת קודקוד חדש v_{new} המחובר בקשת לכל קדקדי G המקוריים.

זמן: לינארי.

נכונות

$(\Rightarrow)$ נניח שיש צביעה חוקית עבור G בשלושה צבעים. נשתמש באותה הצביעה עבור G' ואת v_{new} נצבע בצבע החדש(הרביעי). נקבל צביעה חוקית(כל קשת שהייתה בG מקיימת את הכלל בגלל הצביעה המקורית, ועבור כל קשת חדשה, אחד הקצוות שלה הוא v_{new} שצבוע בצבע ייחודי). $G' \in 4COL$

$(\Leftarrow)$ נניח שיש צביעה חוקית בארבעה צבעים. עבור G' בהכרח v_{new} צבוע בצבע ייחודי(אם יש קודקוד u שצבוע באותו צבע, הקשת (u, v_{new}) שבנינו מפירה את חוקיות הצביעה). מכאן שכל שאר קודקודים G'(שהם קודקודי G המקורי) צבועים, באופן חוקי ב3 צבעים לכל היותר.

מסקנה

ניתן להפעיל את זה כדי להוכיח $nCOL \leq_p (n+1)\,COL$, ולהראות ברדוקציה שלכל $n \geq 3$, $nCOL \in NPC$.

כמו כן מתקיים $2COL \leq_p 3COL$ - כי $2COL \in NP$. אבל $2COL \notin NPC$, ו$3COL \not\leq_p 2COL$

(הערה: לכל $A, B \in NPC$ מתקיים $_{NP\ni}A \leq_p B_{\in NPH}$)

תרגיל

נתבונן בבעיית המסלול ההמילטוני המכוון(DHP). האם היא בP? NP-שלמה?

הערה

אם יש מעגל יש בהכרח גם מסלול, ולכן $DHP \supset DHC$

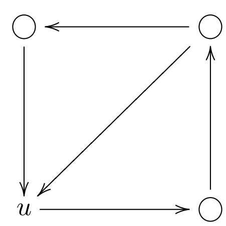
פתרון

בהעיה בNP(ננחש מסלול ונבדוק אם הוא המילטוני). ננסה להראות ש$DHP \in NPC$ ע"י רדוקציה $DHC \leq_p DHP$.

כלומר בהינתן קלט G עבור DHC, נרצה לבנות קלט G' עבור DHP(המסלול) כך שיתקיים $G \in DHC \Leftrightarrow G' \in DHP$

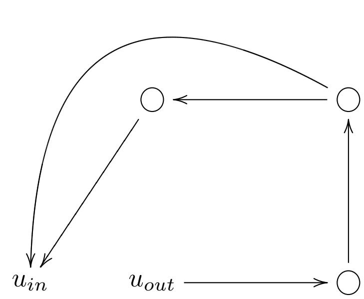
נסיון ראשון: להוסיף קודקוד שיש לו וממנו קשתות לכל הקודקודים האחרים. זה לא עובד.

הבנייה



ניקח קודקוד u שרירותי בG ונחליף אותו בקודקודים u_{in}, u_{out}. לu_{in} יכנסו קשתות מכל הקודקודים שהיו מהם קשתות לu. מu_{out} יצאו קשתות לכל הקודקודים

שהיו מהם קשתות לu.



זמן: לינארי

נכונות

($\Rightarrow$) נניח שיש מעגל המילטוני בG, בה"כ נניח שהוא מתחיל מu. נסמן את קודקודי המעגל לפי הסדר $u, v_1, v_2, ...v_{n-1}, u$.
כעת, ניתן לראות שהמסלול $u_{out}, v_1, v_2, ...v_{n-1}, u_{in}$ הוא מסלול המילטוני בG'.

($\Leftarrow$) נניח שיש מסלול המילטוני בG'. מסלול זה חייב להתחיל בu_{out} ולהסתיים בu_{in}. נסמן את המסלול $u_{out}, v_1, ...v_{n-1}, u_{in}$. ניתן לראות ש$u, v_1, ...v_{n-1}, u$ מהווה מעגל המילטוני בG.