אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב– פתרון תרגיל בית מס׳ 12

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו (ע״י דוגמא נגדית) את הטענות הבאות:

א. יהיו U_1,U_2,U_3 תת-מרחבים של ממ״פ בעל ממד סופי V.
אם מתקיים: $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = V$, אזי $U_1^{\perp} \oplus U_2^{\perp} \oplus U_3^{\perp} = V$.

<u>פתרון</u>

לא נכון. דוגמא נגדית: ב- $V=\mathbb{R}^3$ נגדיר
$U_1 = Sp(\{(1,0,0)\})$ $U_2 = Sp(\{(0,1,0)\})$ $U_3 = Sp(\{(0,0,1)\})$.

אזי $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

אבל $U_1^{\perp} = Sp(\{(0,1,0),(0,0,1)\})$ $U_2^{\perp} = Sp(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$,

ולפיכך $(0,0,1) \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$, ולכן הסכום אינו ישר (כדי שהסכום יהיה סכום ישר, דרוש כי חיתוך של כל זוג מרחבים מתוך האוסף הוא מרחב טריוויאלי).

ב. יהיו U,W תת-מרחבים של ממ״פ V, כך ש- $U \oplus W = V$, אזי $W = U^{\perp}$.

<u>פתרון</u>

לא נכון. דוגמא נגדית: ב- $V=\mathbb{R}^2$ נגדיר $W = Sp(\{(1,1)\})$ $U = Sp(\{(1,0)\})$

אזי $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ (בדקו!), אבל $U^{\perp} = Sp(\{(0,1)\}) \neq W$.

ג. ניקח $n \geq 2$, $V = \mathbb{R}^n$ ונצייד אותו במכפלה הפנימית הסטנדרטית.
תהי $A = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ קבוצת וקטורים ב- V, כאשר $k \geq 2$.
אם $A^{\perp} = \left(A - \{v_1\}\right)^{\perp}$, אז A תלויה ליניארית.

<u>פתרון</u>

<u>הטענה נכונה.</u> נוכיח זאת:

מתקיים לכל קבוצה סופית של וקטורים (הראו!) כי: $A^{\perp} = \left(Sp(A)\right)^{\perp}$, לכן מתוך הנתון שלנו כאן מקבלים (לאחר שנעבור למרחב הניצב בשני הצדדים): $Sp(A) = Sp\left\{\left(A - \{v_1\}\right)\right\}$, ז״א שהווקטור $v_1 \in A$ הוא צירוף ליניארי של איברי הקבוצה $A - \{v_1\}$, לכן הקבוצה הנ״ל תלויה ליניארית. מש״ל.

שאלה 2

5.6 תרגיל. נגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^*)$. מצא את המרחב הניצב עבור התת–מרחבים הבאים:

א. מרחב המטריצות העל–אלכסוניות $\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

ב. מרחב המטריצות המקיימות $\mathrm{tr}(A)=0$.

פתרון

א. המרחב הניצב כאן הוא מרחב המטריצות המשולשות-תחתונות, מהצורה:

$$\begin{pmatrix} * & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \ldots & * \end{pmatrix}$$

ברור כי המכפלה הפנימית המוגדרת כאן בין מטריצה על-אלכסונית כלשהי לבין מטריצה מהצורה הנ"ל כאן היא 0, ומצד שני אם ניקח מטריצה כלשהי מסדר n מעל $\mathbb{C}$ ונחשב מכפלה פנימית בינה לבין מטריצה על-אלכסונית <u>כלשהי</u>, נשתכנע שאם ברצוננו לקבל 0, אנו נדרוש שכל האיברים מעל האלכסון הראשי יהיו 0, כלומר המטריצה חייבת להיות משולשית-תחתונה.

ב. אם ניקח $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, כך ש- $tr(A)=0$, נקבל כי:

$$\langle A,cI\rangle = tr\left(A(cI)^*\right)=\bar{c}\cdot tr(AI)=\bar{c}\cdot tr(A)=0 \quad , \quad c\in\mathbb{C}$$

לכן תת-מרחב,המכיל את כל המטריצות מהצורה $c\in\mathbb{C} \quad , \quad B=cI$, כלומר המטריצות הסקלריות, מוכל במרחב הניצב המבוקש.

יש להראות גם הכלה הפוכה..... ואנחנו סומכים עליכם ☺

שאלה 3

א.

תנו דוגמה לטרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ שמקיימת

$(\ker T)^{\perp}=Sp\{(1,2,0,4),(-1,0,1,0)\}$ וגם $T(1,0,1,1)=(1,2,1,1)$.

(אין צורך לתת נוסחה מפורשת עבור $T(x,y,z,t)$)

פתרון

התנאי הנתון על הגרעין של T שקול לתנאי $\ker T=(Sp\{(1,2,0,4),(-1,0,1,0)\})^{\perp}$.

מחישוב סטנדרטי נובע כי $\ker T=Sp\{(2,-1,2,0),(0,-2,0,1)\}$ (הכוונה היא לפתור את

המערכת הבאה: $\begin{cases} 2a-b+2c=0 \\ -2b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a\ \ b\ \ c\ \ d)\cdot(2\ \ -1\ \ 2\ \ 0)=0 \\ (a\ \ b\ \ c\ \ d)\cdot(0\ \ -2\ \ 0\ \ 1)=0 \end{cases}$).

עכשיו, הקבוצה $B=\{(1,0,1,1),(2,-1,2,0),(0,-2,0,1),(0,0,1,0)\}$ היא בסיס של $\mathbf{R}^4$

ועי"פ משפט הגדרת העתקה ליניארית על בסיס, קיימת העתקה ליניארית $T:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ המקיימת:

$T(1,0,1,1)=(1,2,1,1)$, $T(2,-1,2,0)=T(0,-2,0,1)=(0,0,0,0)$, $T(0,0,1,0)=(1,0,0,0)$.

נשאר לבדוק שההעתקה שהגדרנו מקיימת את הדרישות: התמונה של T נפרשת ע"י התמונות של וקטורי B , לכן ממדה 2 ולכן ממדו של הגרעין הוא 2 . נובע מכך ש- $\ker T=Sp\{(2,-1,2,0),(0,-2,0,1)\}$ וכך הוכחנו שכל הדרישות מתקיימות.

ב.

תהי $A=\{u,v,w\}$ קבוצת וקטורים ב- $\mathbf{R}^4$.

נתון כי $A^{\perp}=Sp\{(1,2,1,1),(2,2,2,2),(2,1,2,2)\}$.

הוכח כי הקבוצה A תלויה ליניארית.

<u>פתרון</u>

נשתמש בטענת העזר הבאה (הוכיחו!): $A^{\perp}=(SpA)^{\perp}$.

אם נצמיד את שני הצדדים של השוויון (כלומר נעבור למרחבים הניצבים משני הצדדים), נקבל ש- $(A^{\perp})^{\perp}=SpA$.

מצד שני, בדיקה סטנדרטית מראה ש- $\dim A^{\perp}=2$ ולכן $\dim SpA=\dim(A^{\perp})^{\perp}=2$ ומכיוון שהקבוצה A מכילה 3 איברים, היא תלויה ליניארית.

<u>שאלה 4 – רשות (קשה)</u>

יהי $V=C[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[-1,1]$, עם המכפלה הפנימית $<f,g>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, ויהי W תת המרחב של כל הפונקציות הרציפות הזוגיות ($f(x)=f(-x)$) על הקטע. מהו $W^{\perp}$?
האם מתקיים $V=W\bigoplus W^{\perp}$? (נמקו)

<u>פתרון</u>

נניח כי $g\in W^{\perp}$, כלומר לכל $f\in W$ מתקיים: $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$ (1).

בשלב זה פונקציה g היא רציפה כלשהי בקטע $[-1,1]$, ופונקציה f רציפה וזוגית בקטע הנ"ל. את האינטגרל לעיל נוכל להפריד לשני חלקים באופן הבא:

$$(2)\quad \int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)g(x)dx$$

במחובר הראשון באגף ימין נבצע החלפת משתנה: $\begin{matrix} t=-x:1\to 0 \\ dt=-dx \end{matrix}$ ונקבל:

$$\int_{-1}^{0} f(x)g(x)dx = \int_{1}^{0} f(-t)g(-t)(-dt) \underset{f(-t)=f(t)}{\overset{\text{f is an even function, i.e.}}{=}} \int_{0}^{1} f(t)g(-t)dt$$

את האינטגרל האחרון בשרשרת (מימין) נוכל לרשום עם שם המשתנה x במקום השם t ונקבל:

$$\int_{-1}^{0} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)g(-x)dx$$

אם נציב זאת ב-(2), נקבל:

$$(3) \quad \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)g(-x)dx + \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)\left[g(-x)+g(x)\right]dx$$

כזכור, אנו מחפשים את הפונקציות g שעבורן האינטגרל הנ"ל שווה ל-0 לכל פונקציה זוגית ורציפה f, בקטע $[-1,1]$.

נשים לב שכדי להגדיר פונקציה זוגית על הקטע $[-1,1]$ מספיק להגדיר פונקציה $h(x)$ על הקטע $[0,1]$ ואז להגדיר לכל $x\in[-1,0]$ $h(x)=h(-x)$. (צריך רק להוכיח ש־ h רציפה אבל זה קל מאוד). בפרט אם נגדיר $h(x)=g(-x)+g(x)$ על $[0,1]$ נוכל להרחיב את h לפונקציה זוגית על $[-1,1]$. נקבל ש־ $0=\int_{-1}^{1}h(x)g(x)dx=\int_0^1 h(x)[g(-x)+g(x)]dx=\int_0^1(h(x))^2dx$. אבל זה מתקיים רק אם $h(x)=0$ כלומר $g(-x)=-g(x)$, זאת אומרת g אי זוגית.
לכן $W^\perp$ מוכלת בקבוצת הפונקציות האי־זוגיות.
מאידך ברור מהחישוב לעיל שאם g אי זוגית אז $g\in W^\perp$. לכן $W^\perp$ הוא בדיוק מרחב הפונקציות האי זוגיות.
נראה ש־ $W\bigoplus W^\perp=V$. כרגיל $W\cap W^\perp=\{0\}$. נראה ש־ $W+W^\perp=V$.
כל פונקציה $f\in V$ אפשר לכתוב כ־ $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, קל לראות שהרכיב הראשון הוא פונקציה זוגית, והשני פונקציה אי זוגית.
נשים לב, כי הטענה <u>אינה</u> נובעת ממשפט הפירוק הניצב, כי המשפט הזה תקף <u>רק</u> עבור מרחבים בעלי ממד סופי!

<u>שאלה 5</u>

יהי V מרחב אוניטרי (כלומר ממ"פ מעל $\mathbb{C}$) ו- $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס אורתונורמאלי של V.
חשבו את $\left\|v_1+\sqrt{2}v_2+\sqrt{3}v_3+...+\sqrt{n}v_n\right\|$.

<u>פתרון</u>

מכוון שזה בסיס אורתונורמאלי, מקבלים:

$$\left\|v_1+\sqrt{2}v_2+\sqrt{3}v_3+\ldots+\sqrt{n}v_n\right\|^2=\left\langle v_1+\sqrt{2}v_2+\sqrt{3}v_3+\ldots+\sqrt{n}v_n, v_1+\sqrt{2}v_2+\sqrt{3}v_3+\ldots+\sqrt{n}v_n\right\rangle$$

$$\underset{\text{system}}{\overset{\text{orthogonal}}{=}}\left\|v_1\right\|^2+2\left\|v_2\right\|^2+3\left\|v_3\right\|^2+\ldots+n\left\|v_n\right\|^2\underset{\text{vectors}}{\overset{\text{orthonormal}}{=}}1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ולכן התשובה היא: $\left\|v_1+\sqrt{2}v_2+\sqrt{3}v_3+\ldots+\sqrt{n}v_n\right\|=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$.

שאלה 6

א. יהי $U=Sp\{u_1,u_2,...,u_k\}$ ת״מ של ממ״פ בעל ממד סופי V. נניח כי הקבוצה $\{u_1,u_2,...,u_k\}$ תלויה ליניארית. הוכיחו, כי אם נבצע על הוקטורים הנ״ל תהליך גרם-שמידט, בהכרח נקבל בשלב מסוים $u_i^*=0$.

פתרון

לפי הנתון, הקבוצה $\{u_1,u_2,...,u_k\}$ תלויה ליניארית, לכן מתקיים: $(*)\quad \dim U<k$.
נניח בשלילה, שלאחר הפעלת תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנ״ל, נקבל את הקבוצה:
$\{u_1^*,u_2^*,...,u_k^*\}$, כך שלכל $1\le i\le k$ מתקיים: $u_i^*\neq 0$.
הקבוצה האחרונה היא אורתוגונאלית (ובפרט כל זוג וקטורים שונים מתוכה ניצבים), ולכן, היא בת״ל (טענה שהוכחה בכיתה). מכאן נקבל שהממד של U הוא לפחות k, בסתירה ל-(*).
סתירה זו מראה, שהנחת השלילה שלנו שגויה ובקבוצה הזו חייב להופיע ווקטור האפס, לפחות פעם אחת. מש״ל.

ב. מדוע לא ניתן להמשיך בתהליך במקרה של סעיף א׳, ללא הכנסת שינויים כלשהם?

פתרון

אם בשלב מסוים נקבל $u_i^*=0$, הרי קבלת הווקטור הבא לפי גרם-שמידט היא כך:

$$u_{i+1}^*=u_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}\frac{\left\langle u_{i+1},u_j^*\right\rangle}{\left\|u_j^*\right\|^2}u_j^*$$

והמחובר האחרון בסכום הנ״ל הוא: $\frac{\left\langle u_{i+1},u_i^*\right\rangle}{\left\|u_i^*\right\|^2}u_i^*$, ומכוון ש- $u_i^*=0$, המכנה =0, המחובר הנ״ל אינו מוגדר!

ג. כיצד ניתן בכל זאת להשתמש בתהליך זה לצורך בניית בסיס אורתוגונאלי ל- U?

פתרון

נניח שבמהלך התהליך בנינו כבר את $i-1$ הווקטורים $\left\{u_1^*,u_2^*,...,u_{i-1}^*\right\}$, המהווים קבוצה אורתוגונאלית ומתקיים: $(1)\quad Sp\left\{u_1^*,u_2^*,...,u_{i-1}^*\right\}=Sp\left\{u_1,u_2,...,u_{i-1}\right\}$

ונניח כי אם נגדיר: $u_i^*=u_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\left\langle u_i,u_j^*\right\rangle}{\left\|u_j^*\right\|^2}u_j^*$, נקבל $u_i^*=0$.

מכאן יוצא כי u_i הוא צירוף ליניארי של $\left\{u_1^*,u_2^*,...,u_{i-1}^*\right\}$, ולפי (1) מתקיים:

$$u_i\in Sp\left\{u_1,u_2,...,u_{i-1}\right\}\quad (2)$$

ז"א u_i הוא צירוף ליניארי של קודמיו וגריעתו מן הקבוצה $\left\{u_1,u_2,...,u_k\right\}$ לא תשנה את תת-המרחב הנפרש ע"י הקבוצה הנ"ל, כלומר:

$$U=Sp\left\{u_1,u_2,...,u_k\right\}=Sp\left\{u_1,u_2,...,u_{i-1},u_{i+1},...,u_k\right\}$$

אם כן, נוכל להוציא את הווקטורים u_i,u_i^* מכלל דיון, ולהגדיר:

$$u_{i+1}^*=u_{i+1}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\left\langle u_{i+1},u_j^*\right\rangle}{\left\|u_j^*\right\|^2}u_j^*$$

אם $u_{i+1}^*\neq 0$, הקבוצה $\left\{u_1^*,u_2^*,...,u_{i-1}^*,u_{i+1}^*\right\}$ היא אורתוגונאלית ומתקיים:

$$Sp\left\{u_1^*,u_2^*,...,u_{i-1}^*,u_{i+1}^*\right\}=Sp\left\{u_1,u_2,...,u_{i-1},u_{i+1}\right\}\overset{(2)}{=}Sp\left\{u_1,u_2,...,u_{i-1},u_i,u_{i+1}\right\}$$

ועתה נוכל לעבור לשלב הבא של התהליך.