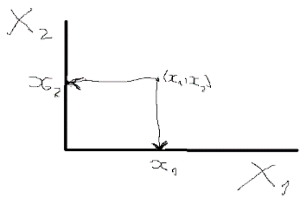
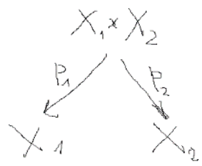
<u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

(X_1,τ_1), (X_2,τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1\times X_2 = \{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\} = \prod_{i\in\{1,2\}} X_i \qquad (X_1\times X_2, \tau_{\Pi} = ?)$$





יותר כללי: $\tau_{\Pi} = ?$ על $X = X_1\times\cdots\times X_n = \{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i\} = \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של <u>**הטלות**</u>

$$p_k : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n) = x_k$$

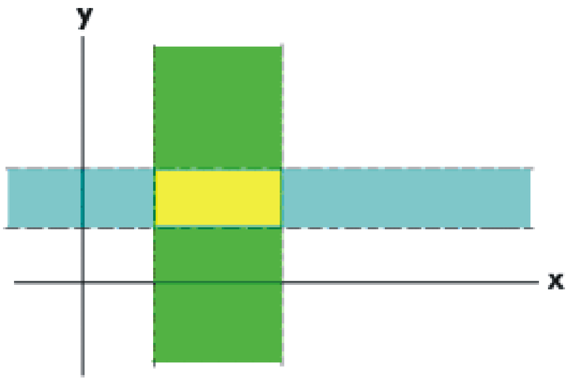


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2 \mid x_1\in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2) = \underbrace{O_1\times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

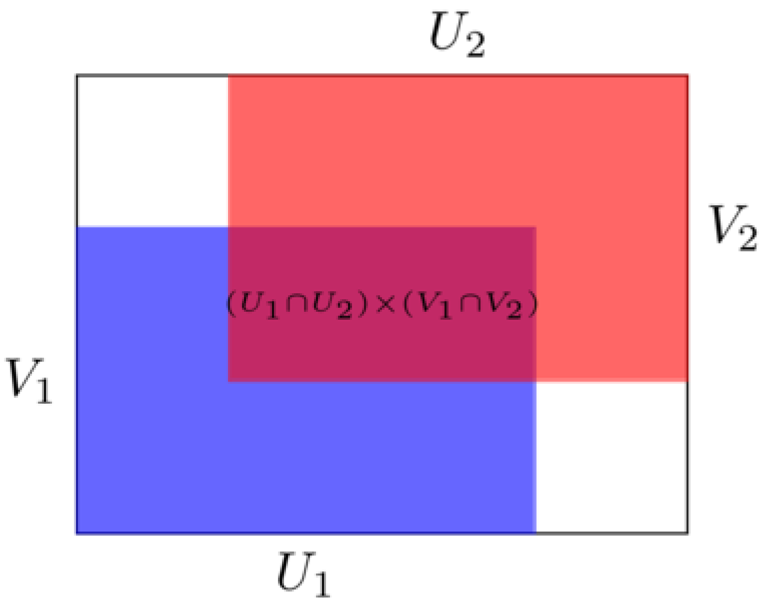
$O_1\times X_2$, $X_1\times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1\times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) – $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ במקרה של $n = 2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^\cup$. נגדיר

$$\tau_\Pi = \gamma^\cup$$

ז"א "קבוצה פתוחה" במכפלה טופולוגית = איחוד של תיבות בסיסיות.

שקול: $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathrm{N}(x_i) \quad O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq O$

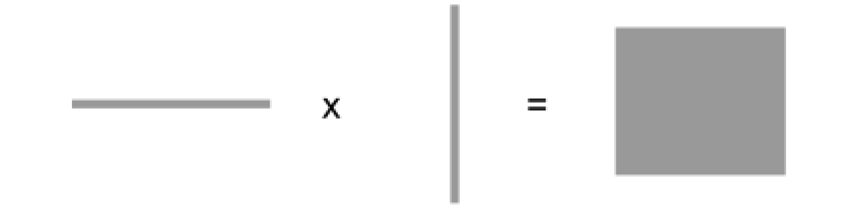
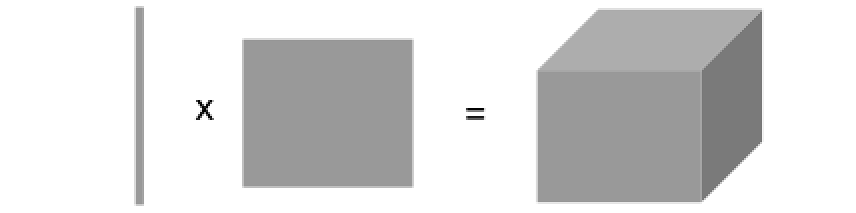
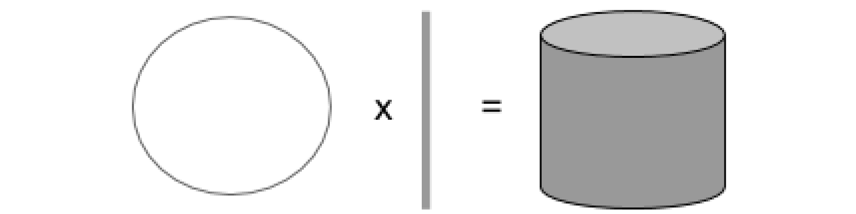
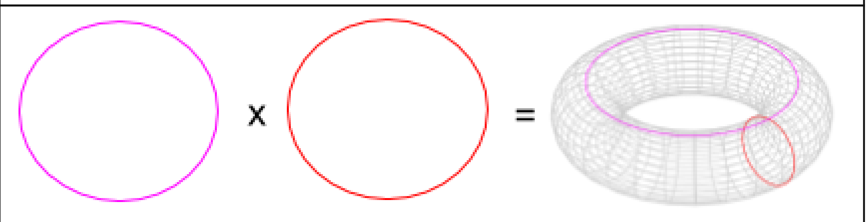
משפט: $X = (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$\mathrm{p}_i : (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i, \tau_\Pi) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרוי $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_\Pi = \gamma^\cup$.

פרא-בסיס סטנדרטי $\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)=X_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n \mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות". אז

$$\alpha^{\cap F}=\gamma \qquad \tau_{\Pi}=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

I^1 x I^1 = I^2	
I^1 x I^2 = I^3	
S^1 x I^1 = Cylinder	
S^1 x S^1 = Torus	

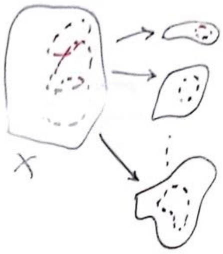
טורוס n-ממדי $\quad S_1^{\,n}=S_1\times\cdots\times S_1\simeq T^n$

הוא בעל מימד n קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א T^n **לוקלית** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע ?)

<u>הגדרה:</u> טופולוגיה חלשה ($Weak\ Topology$).

נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in TOP$, $i\in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X\xrightarrow{f_i}X_i$



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש –

א. $(X,\tau_w)\xrightarrow{f_i}(X_i,\tau_i)$ רציפות.

ב. בהינתן ש – σ טופולוגיה מסוימת על X כך ש - $(X,\sigma)\xrightarrow{f_i}(X_i,\tau_i)$ רציפות
מתקיים – $\sigma\supseteq\tau_w$

(ז"א τ_w היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

τ_w נקראת "**טופולוגיה חלשה**". הגדרה פורמלית:

$$\tau_w=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$

כאשר $\alpha:=\{f_i^{-1}(O_i)\,|\,O_i\in\tau_i, i\in I\}$.

לפי הבנייה α פרא-בסיס ל - τ_w ו - $\gamma:=\alpha^{\cap_F}$ בסיס ל - τ_w.

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב , טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

<u>משפט:</u> (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $Y\xrightarrow{g}X$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי – $X\underset{i\in I}{\xrightarrow{f_i}}(X_i,\tau_i)$.

אזי $Y\underset{i\in I}{\xrightarrow{f_i\circ g}}(X_i,\tau_i)$ רציפות $\Leftrightarrow$ $Y\xrightarrow{g}(X,\tau_w)$ רציפה.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(\Rightarrow)$:</u> ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

<u>$(\Leftarrow)$:</u>

צ"ל $Y\xrightarrow{g}(X,\tau_w)$ רציפה.

ש"ל $\forall O \in \tau_w : g^{-1}(O) \in \sigma$.

מ"ל (על פרא-בסיס $\alpha =$). ז"א כאשר –

$$\exists i \in I : f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

תוצאה: τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

הסבר: זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X, \tau_w) \overset{g=id}{\to} X = Y$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

- תת מרחב טופולוגי:

$(X, \tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookleftarrow}} (Y, ?)$ (Y תת קבוצה של X).

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו!).

שימו לב: $\forall O \in \tau \subseteq X : i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $i \in \{1, \cdots, n\}$ (X_i, τ_i)

$X = (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi) \to (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

מתקיים $\tau_w = \tau_\Pi$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה: מכפלה טופולוגית** (אין הגבלה) של $I \ni \mathrm{i}$ (X_i,τ_i)

$$X=\left\{I\xrightarrow{x}\bigcup_{i\in I}X_i\,,x(i)\in X_i\right\}=\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}(X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x=(x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

<u>היטלים:</u> $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w=\tau_\prod=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$ טופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\mid O_i\in\tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי "תיבות אלמנטריות".

$$\gamma:=\alpha^{\cap F}=\{\text{תיבות בסיסיות}\}=\left\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\,\middle|\,\text{סופי } J\subseteq I,O_j\in\tau_j\right\}$$

בסיס סטנדרטי.

<u>הערות:</u>

א. $\mathrm{p}^{-1}{}_i(O_i)=O_i\times\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$

ב. $\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\cap\mathrm{p}_k{}^{-1}(O_k)=O_i\times O_k\times\prod_{j\in I\setminus\{i,k\}}X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J}p_j{}^{-1}(O_j))=\begin{cases}O_k & if\ k\in J\\ X_k & if\ k\notin J\end{cases}$

ד. $O\in\tau_\prod\Leftrightarrow x=(x_i)_{i\in I}\in O\Rightarrow\exists\ finite\ J\subseteq I\ \exists O_j\in\tau_j\ \ x\in\bigcap_{i\in J}p_j{}^{-1}(O_j)\subseteq O$

שימו לב: תנאי $x\in\bigcap_{i\in J}p_j{}^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j\in O_j\quad\forall j\in J$.

- <u>טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:</u>

א. <u>תזכורת</u>: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho)=\{\text{פתוחות במובן } \rho\}=\{B_\rho(x,r)\,|\,x\in X,r>0\}^{\cup}=\gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{X\xrightarrow[i\in I]{id}\left(X,top(\rho_i)\right)\right\}\quad(\text{ז"א } \forall i: f_i=id)$$

לכן – $\tau_w=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר – $\alpha:=\{B_{\rho_i}(x,r)\,|\,x\in X,r>0,i\in I\}$

"כדורים" פרא-בסיס ל - τ_w.

- <u>טופולוגיה נקודתית</u> על $X=C[0,1]$ (ניתן להכללות):

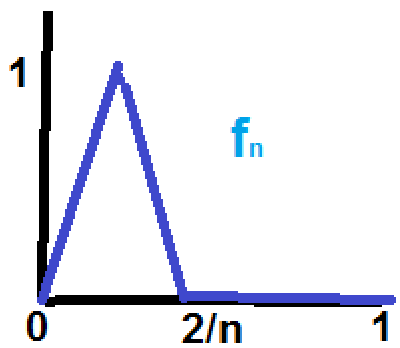
עבור $t\in[0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1,f_2)=|f_1(t)-f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$
$$\downarrow$$
$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]})=:\tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית $(pointwise\ topology)$.

<u>הערה:</u> $top(d_{max})\subsetneq(C[a,b],\tau_p)$ לא מטריזבילית (אבל חשובה באנליזה).

$\tau_p\neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n\in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n})=1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס אבל לא בטופולוגיה $top(d_{\max})$.

- <u>טופולוגיה p – אדית:</u> $n\in\mathbb{N}$ $top(d_p)=\tau_w\left\{\mathbb{Z}\underset{k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}}{\overset{f_n}{\longrightarrow}}(\mathbb{Z}_{p^n},discr)\right\}$

בעצם פונקצית האלכסון $\mathrm{f}=\Delta_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{f}_n:(\mathbb{Z},\mathrm{d}_p)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}$ מגדיר שיכון טופולוגי.

($\mathbb{Z}_{p^n}=\{0,1,\cdots,\mathrm{p}^n-1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

הגדרה: $f:\mathrm{X}\to Y$ נקרה **<u>שיכון טופולוגי</u>** אם פונקציה מושרת $f:\mathrm{X}\to f(X)$ הומיאומורפיזם.

<u>טענה</u>: נניח $f_i:\mathrm{Y}_i\to\mathrm{X}_i$ פונקציות רציפות $\forall i\in I$.

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f:=\prod_{i\in I}f_i$ הבאה היא רציפה

$f((y_i)_{i\in I})=(f_i(y_i))_{i\in I}$ $f:\prod_{i\in I}Y_i\to\prod_{i\in I}X_i$.

<u>הוכחה</u>: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $\mathrm{Y}:=\prod_{i\in I}Y_i, X=\prod_{i\in I}X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^Y, p_i^X . אז יש לנו פונקציה $f:\mathrm{Y}\to X$ כך ש $p_i^X\circ f=f_i\circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפות. לכן גם $f_i\circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X\circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

<u>תוצאה</u>: אם כל גורם $f_i:\mathrm{Y}_i\to\mathrm{X}_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$.

$\mathrm{Y}_i\simeq\mathrm{X}_i\Rightarrow\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}Y_i\simeq\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i$.

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}\simeq(-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

<u>תרגיל:</u> $\mathrm{S}_2\setminus\{\mathrm{z}\}\simeq(0,1)\times(2,4)$

<u>הסבר:</u> $\mathrm{S}_2\setminus\{\mathrm{z}\}\simeq\mathbb{R}^2$ $\forall\mathrm{z}\in\mathrm{S}_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2\simeq(0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$.

<u>תרגיל:</u> $X\times Y\simeq Y\times X$ (נסו להוכיח וגם להכליל).

<u>משפט</u>: נניח $f_i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_i$ פונקציות רציפות.

הוכיחו "שפונקצית האלכסון" $f := \Delta_{i\in I} f_i$ הבאה רציפה

$$f : Y \to X = (\prod_{i\in I} X_i, \tau_\Pi) \quad f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$$

רציפה ומתקיים $f_k = p_k \circ f \quad \forall k \in I$.

<u>הוכחה</u>: $\forall \mathrm{y} \in \mathrm{Y} \quad (p_k \circ f)(\mathrm{y}) = p_k(f(y)) = p_k((f_i(\mathrm{y}))_{i\in I}) = f_k(y)$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k = p_k \circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

<u>דוגמה</u>: $\mathrm{f}_1 : \mathbb{R} \to [-1,1], \mathrm{f}_1(t) = \cos t \quad \mathrm{f}_2 : \mathbb{R} \to [-1,1], \mathrm{f}_2(t) = \sin t$

$$\mathrm{f} = \mathrm{f}_1 \Delta \mathrm{f}_2 : \mathbb{R} \to [-1,1]\times[-1,1], \mathrm{f}(t) = (\cos t, \sin t) \quad \mathrm{f}(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_1$$

<u>משפט</u>: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $\mathrm{p}_i : (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i, \tau_\Pi) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i)$ היא פונקציה **פתוחה**.

הוכחה: צ"ל $\mathrm{p}_k(\mathrm{O}) \in \tau_k \quad \forall \mathrm{O} \in \tau_\Pi$.

אם $\mathrm{O} \in \gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I} \quad \mathrm{O} = \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$$

נשתמש בשוויון $p_k(O) = p_k(\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)) = \begin{cases} O_k & if\ k \in J \\ X_k & if\ k \notin J \end{cases}$.

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O \in \gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל τ_Π ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

הערה: הטלות בד"כ לא פונקציות סגורות. למשל $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ לא סגורה כי

$A=\{(x,\frac{1}{x})\,|\,x>0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אבל $p_1(A)=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>אזהרה:</u> מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2},3\right) \times \left(\frac{1}{2},3\right) \times \dots$ **לא פתוחה** ב - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$

כאן $I = \mathbb{N}$ $\quad (X_n, \tau_n) = \mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז – $(a,b)^{\mathbb{N}} \in \tau_\pi = \gamma^{\cup}$. לכן

$\Leftarrow$ $(a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $\dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times O_m \times \dots \times O_2 \times O_1 \supseteq \dots \times (a,b) \times (a,b)$.

אבל זה גורר $\mathbb{R} \supseteq (a,b)$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ בסיס ל $\tau_\prod$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) \,\middle|\, J \subseteq I, O_j \in \gamma_j \text{ סופי}\right\}$

<u>שאלה חשובה</u>: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\cdots, Sep, B_1, B_2, Metriz, \cdots$

- (מכפלות סופיות)

$discr$ $\quad LComp,$ קומפקטיות מקומית

<u>הגדרה:</u> מ"ט X הוא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

<u>הערה:</u> "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה <u>אינסופית</u> (סופית – כן!).