

## פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 9: עקרון המקסימום. נוסחת ניוטון לייבניץ

1. עקרון המקסימום:

תהי  $f(z)$  אנליטית בתחום  $D$ . אזי באף נקודה של  $D$  המודול  $|f(z)|$  אינו מקבל את הערך המקסימלי שלו, פרט למקרה ש  $f(z)$  קבועה.  
מסקנה: אם  $f(z)$  אנליטית (ולא קבועה) ב  $D$  ורציפה ב  $\bar{D}$ , אזי הערך המקסימלי של  $|f(z)|$  מתקבל על השפה.

(א) מצא את הערך המקסימלי של  $|f(z)|$  כאשר  $f(z) = z^4/(z+3)^2$  ו  $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$ .

$f(z)$  אינה קבועה לכן  $\max |f(z)|$  מתקבל על השפה  $z = 2e^{i\theta}$ . נרשום  $\max |f(z)|$  על מנת לקבל את  $|f(z)| = |z^4|/|z+3|^3 = 2^4/|2e^{i\theta} + 3|^3$   
נחשב

$$\min_{\theta} |2e^{i\theta} + 3| = \min_{\theta} [(2 \cos \theta + 3)^2 + 4 \sin^2 \theta] = 1$$

$$\max |f(z)| = 16$$

(הערה: היינו יכולים להעריך את  $|f(z)|$  על השפה:

$$|f(z)| \leq 2^4/||2e^{i\theta} - 3|^3 = 16 \text{ ולכן } \max |f(z)| \leq 16.$$

2. נוסחת ניוטון לייבניץ:

אם  $f(z)$  אנליטית בתחום פשוט קשר  $D$  אזי  $F(z) = \int_{z_0}^z f(t)dt$  גם אנליטית ב  $D$ ,  $F'(z) = f(z)$  ומתקיים

$$(1) \quad \int_{z_0}^z f(t)dt = F(z) - F(z_0).$$

משוואה (1) נקראת נוסחת ניוטון לייבניץ.  $F(z)$  נקראת פונקציה קדומה ל  $f(z)$ .

(א) חשבו  $\int_{-2i}^{2i} dz/z$  עבור הענף  $\ln z = \ln |z| + i\phi$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  לאורך חצי המעגל השמאלי  $|z| = 2$ .

נבחר תחום סגור כלשהוא שעוקף את הקרן  $\Re(z) \geq 0$  וכולל את חצי המעגל השמאלי  $|z| = 2$ . אזי  $f(z)$  אנליטית בתחום כזה ולכן

$$\int_{-2i}^{2i} dz/z = \ln z|_{-2i}^{2i} = (\ln |z| + i\phi)|_{-2i}^{2i} = i\phi|_{3\pi/2}^{\pi/2} = -i\pi.$$

(הערה: היינו יכולים לסגור את חצי המעגל למעגל  $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$  ולהשתמש בנוסחת קושי עבור  $f(z) = \varphi(z)/z$  כאשר  $\varphi = 1$ , על מנת לקבל  $\int_{-2i}^{2i} dz/z = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} dz/z = -\pi i$ .)