שאלות פתוחות שבוע 2 - גבולות של סדרות

שאלות פתוחות:

1. תהי a_n סדרה כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$.

פתרון: נבחר $\epsilon = 1$. לפי הגדרת גבול של סדרה, קיים N_1 שהחל ממנו (כלומר לכל $n > N_1$) מתקיים

$$|a_n| < 1$$

כלומר החל משלב מסוים בסדרה $|a_n| < 1$. מספרים כאלה מקיימים ש $|(a_n)^n| \le |a_n|$ (העלאה בחזקה רק מקטינה אותם). כעת יהי $\epsilon > 0$, לפי הגדרת גבול של סדרה קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים

$$|a_n| < \epsilon$$

כעת אם ניקח $N > N_1, N_2$ אז לכל $n > N$ מתקיים

$$|(a_n)^n| \le |a_n| < \epsilon$$

ולכן לפי הגדרת הגבול

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$$

הערה: אחרי שלומדים את משפט הסנדויץ אפשר להוכיח גם ככה: מגלים כמו קודם ש

$$|(a_n)^n| \le |a_n|$$

אז כמובן ש

$$0 \le |(a_n)^n| \le |a_n|$$

ולכן לפי סנדויץ

$$\lim_{n\to\infty} |(a_n)^n| = 0$$

שזה גורר

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$$

(הגרירה האחרונה גם לא טריויאלית וצריך להצדיק אותה)

2. תהינה a_n, b_n שתי סדרות המתכנסות לL. נגדיר סדרה c_n לפי

$$c_n = \begin{cases} a_n & n \text{ even} \\ b_n & n \text{ odd} \end{cases}$$

כלומר, c_n שווה ל a_n עבור n־ים זוגיים ושווה ל b_n עבור n־ים אי זוגיים. הוכיחו כי c_n גם מתכנסת ל L.

פתרון: נוכיח לפי הגדרה: יהי $\epsilon > 0$. לפי הגדרת גבול של סדרה קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon$$

וקיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים

$$|b_n - L| < \epsilon$$

כעת, ניקח $N > N_1, N_2$. ניקח $n > N$ ונביט על

$$|c_n - L|$$

אם n זוגי, אז

$$|c_n - L| = |a_n - L| < \epsilon$$

ואם n אי זוגי אז

$$|c_n - L| = |b_n - L| < \epsilon$$

בכל מקרה קיבלנו

$$|c_n - L| < \epsilon$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

כנדרש.