

פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

חשב את האינטגרלים היעזר בחלוקת פולינומים:

א. $\int \frac{x^3}{2x+1} dx$

ב. $\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 6}{x-1} dx$

ג. $\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x} dx$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}}{x^3} \Big| 2x+1$$

$$\frac{x^3 + \frac{1}{2}x^2}{2}$$

$$- \frac{1}{2}x^2$$

$$- \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

$$- \frac{1}{8}$$

מחלוקת פולינומים נקבל ש $\frac{x^3}{2x+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{16x+8}$

$$\int \frac{x^3}{2x+1} dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{16x+8} \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{8} - \frac{1}{16} \ln|16x+8| + C$$

סעיף ב

$$\frac{3x^2 - 4x + 7}{3x^3 - 7x^2 + 11x - 6} \Big| x-1$$

$$\frac{3x^3 - 3x^2}{-4x^2 + 11x - 6}$$

$$-4x^2 + 11x - 6$$

$$-4x^2 + 4x$$

$$7x - 6$$

$$\frac{7x-7}{1}$$

$$1$$

מחלוקת פולינומים נקבל ש $\frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 6}{x-1} = 3x^2 - 4x + 7 + \frac{1}{x-1}$

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 6}{x-1} dx = \int \left(3x^2 - 4x + 7 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x^3 - 2x^2 + 7x + \ln|x-1| + C$$

סעיף ג

$$\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x} dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+x} = \int \left(\frac{x^3+x}{x^3+x} + \frac{6x^2+11x+8}{x^3+x} \right) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2(3x^2+1)}{x^3+x} + \frac{11x+6}{x^3+x} \right) dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int 1 dx = x, \int \frac{2(3x^2+1)}{x^3+x} dx = 2 \ln(x^3+x)$$

$$\int \frac{11x+6}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{11x}{x(x^2+1)} + \frac{6}{x(x^2+1)} \right) dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int \frac{11}{x^2+1} dx = 11 \arctan x$$

$$\int \frac{6}{x(x^2+1)} dx = 6 \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = 6 \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right)$$

סה"כ נקבל שהפתרון הוא

$$x + 2 \ln|x^3+x| + 11 \arctan x + 6 \ln|x| - 3 \ln(x^2+1) + C$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הכפלה בצמוד:

$$\text{א. } \int \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} dx$$

$$\text{ב. } \int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} dx$$

$$\text{ג. } \int \frac{1}{1-\sin x} dx$$

פתרון שאלה 2

סעיף א

$$\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = 2\sqrt{x+1}+2$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} dx = \int (2\sqrt{x+1}+2) dx = \int \left(2(x+1)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) dx = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x + C$$

סעיף ב

$$\frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} = \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1-\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}} = \frac{x(1-\sqrt{2x+1})}{1-2x-1} = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{2}$$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{2x+1}-1}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x}{2} + C$$

סעיף ג

$$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{1}{1-\sin x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$:

א. $\int \frac{x^2+3x}{x^2-9x+8} dx$

ב. $\int \frac{x^3}{x^2+8x+17} dx$

ג. $\int \frac{x^2+1}{x^2+4x+4} dx$

פתרון שאלה 3

סעיף א

מכיוון שהחזקה של המונה שווה לחזקה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים

$$\frac{1}{x^2+3x} \Big| x^2-9x+8$$

$$\frac{x^2-9x+8}{12x-8}$$

$$\int \frac{x^2+3x}{x^2-9x+8} dx = \int \left(1 + \frac{12x-8}{x^2-9x+8} \right) dx = \int 1 dx + 6 \int \frac{2x-9}{x^2-9x+8} dx + 46 \int \frac{1}{x^2-9x+8} dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחברים:

$$\int 1 dx = x$$

$$\int \frac{2x-9}{x^2-9x+8} dx = \ln|x^2-9x+8| = \ln|(x-1)(x-8)| = \ln|x-1| + \ln|x-8|$$

$$\int \frac{1}{x^2-9x+8} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-8)} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{x-8} dx - \frac{1}{7} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{7} \ln|x-8| - \frac{1}{7} \ln|x-1|$$

$$\text{סה"כ פתרון האינטגרל: } x + \frac{8}{7} \ln|x-8| + \frac{6}{7} \ln|x-1| + C$$

סעיף ב

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה גדולה מהחזקה הגבוהה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים:

$$\frac{x^2-8x}{x^3} \Big| x^2+8x+17$$

$$\frac{x^3+8x^2+17x}{-8x^2-17x}$$

$$-8x^2-17x$$

$$-8x^2-64x-136$$

$$47x+136$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+8x+17} dx = \int \left(x^2-8x + \frac{47x+136}{x^2+8x+17} \right) dx = \int (x^2-8x) dx + \frac{47}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - \int \frac{52}{x^2+8x+17} dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחברים

$$\int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx = \ln(x^2+8x+17) \quad , \quad \int (x^2-8x) dx = \frac{x^3}{3} - 4x^2$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 8x + 17} dx = \int \frac{1}{(x+4)^2 + 1} dx = \arctan(x+4)$$

סה"כ נקבל $\frac{x^3}{3} - 4x^2 + \frac{47}{2} \ln(x^2 + 8x + 17) - 52 \arctan(x+4) + C$

סעיף ג

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה שווה לחזקה הגבוהה של המכנה נבצע חלוקת פולינומים.

$$\frac{1}{x^2 + 1} \Big| x^2 + 4x + 4$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{-4x - 3}$$

$$\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 4} \right) dx = \int \left(1 - \frac{4x + 3}{x^2 + 4x + 4} \right) dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4} dx + 5 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$= x - 2 \ln(x^2 + 4x + 4) - \frac{5}{x+2}$$

שאלה 4

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצורה $\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$:

א. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$

ב. $\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}} dx$

ג. $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}} dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}} dx$

פתרון שאלה 4

סעיף א

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx = \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx - 5 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$$

$$\int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx = 2 \sqrt{x^2+6x+13}$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחזורים

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}} dx = \ln \left((x+b) + \sqrt{(x+b)^2+a^2} \right)$$

נשתמש באינטגרל המידי

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+4}} dx = \ln \left((x+3) + \ln \sqrt{(x+3)^2+4} \right)$$

$$-5 \ln \left((x+3) + \ln \sqrt{(x+3)^2+4} \right) + 2 \sqrt{x^2+6x+13} + C$$

סה"כ התשובה:

סעיף ב

$$\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}} dx = 6 \int \frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}} dx$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{\sqrt{m^2 - (x+n)^2}} dx = \arcsin \frac{x+n}{m}$

$$\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}} dx = 6 \int \frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}} \right) + C$$

סעיף ג

$$\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}} dx = 5 \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} dx = 5 \int \frac{1}{|x+2|} dx = 5 \ln|x+2| + C$$

סעיף ד

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2.5)^2-0.25}} dx = \ln \left((x+2.5) + \sqrt{(x+2.5)^2-0.25} \right) + C$$