התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 8:התמרת לפלס

1.המקור והתמונה

קודם אנו חקרנו את התמרת פורייה

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\sigma t}dt$$

התמרה זו אינה נוחה כי היינו צריכים להעמיס על הפונקציה $f(t)$ תנאים:

$f(t)\in L_1(R)$ או $f(t)\in L_2(R)$ התמרת לפלס מאפשרת להשתחרר מההגבלות האלה.

הגדרה 1.1 (פונקצית מקור):

פונקצית מקור היא פונקציה מרוכבת $f(t)$ של הארגומנט הממשי t,

ש מקיימת את התנאים הבאים:

1. $f(t)$ רציפה בכל הציר R, חוץ מנקודות אי רציפות מסוג 1. בכל אינטרוול סופי מספר נקודות אי הרציפות צריך להיות סופי $\Leftarrow$ אחרת $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין.
2. $f(t)\equiv 0$ עבור $t<0$
3. קיימים $M>0$ $s\in R$ כך שמתקיים:

$$\left|f(t)\right|\le Me^{st}\quad \forall t\in R\quad (1.1)$$

הערה:

אם (1.1) נכון עבור $s=s_1$ אז (1.1) נכון גם עבור כל $s_2>s_1$, כיוון שעבור $t<0$ תמיד $f(t)\equiv 0$: $\left|f(t)\right|\le M(s_1)e^{s_1t}\le M(s_1)e^{s_2t}$

הערה:

הגדרה (קודרבצב): ערך α נקרא ערך תחתון של הקבוצה X אם:

1. $\forall x\in X: x\ge \alpha$
2. $\forall \alpha_1>\alpha \quad \exists x\in X:\ x<\alpha_1$

אם במקום תנאי 2:

3. $\forall \varepsilon>0 \qquad \exists x\in X:\ x<\alpha+\varepsilon$

דוגמא 1: $\inf\limits_{x\in X} x=0 \Leftarrow X=[0,1]$

דוגמא 2: $\inf\limits_{x\in X} x=0 \Leftarrow X=\{0\}\cup[1,2]$

בקשר ל(1.1) ניתן את ההגדרות הבאות:

הגדרה 1.2:

נתבונן באי שוויון (1.1):

$$\left|f(t)\right|\le Me^{st} \quad \mathrm{M}>0, \mathrm{s}\in \mathrm{R}, \forall t\in R \quad (1.1)$$

אז החסם התחתון $\mathrm{s}_0=\inf\limits_{S}\left\{S:(1.1)\ is\ correct\right\}$

נקרא *מעריך הגידול* של הפונקציה $f(t)$.

דוגמא 1:

הפונקציה $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ הינה פונקצית מקור (טריוויאלי):

1. רציפה למקוטעין 2
2. . $\eta\equiv 0$ עבור $0,\ t<0$ 3
3. . $M=1, s=0$: $\left|\eta(t)\right|\le Me^{0\cdot t}$.

הערה: בהמשך נקרא לפונקציה כזו "מקור" במקום "פונקצית מקור".

הערה: בהמשך נניח שהתנאי $f(t)\equiv 0\ t<0$ מתקיים האופן אוטומטי.אם אנו כותבים $f(t)=\sin t$ אז בעצם אנו מתעסקים עם הפונקציה:

$$f(t)=\left(\sin t\right)\cdot\eta(t)=\begin{cases}\sin t, t\ge 0\\ 0 \quad ,t<0\end{cases}$$

משפט 1.3:

אם $f(t)$ מקור, אז מעריך הגידול שלה s_0 מוגדר לפי הנוסחא:

$$(1.2)\quad s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}$$ (גבול עליון של...)

הוכחה:

כיוון ש $\left|f(t)\right|\le Me^{(s_0+\varepsilon)t},\ \varepsilon>0,\ t\in R$ $\Leftarrow$ עבור $t>0$:

$$\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}\le\left(s_0+\varepsilon\right)+\frac{\ln M}{t}\Rightarrow\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}\le s_0+\varepsilon$$ עבור $\forall\varepsilon>0$:

$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}\le s_0$ (ראה הערה שלפני דוגמא 1)

נוכיח כעת ש $s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}$

נניח בשלילה: $s_0 > s_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}$

יהי $\delta>0$ כך ש $s_1+\delta<s_0 \Leftarrow$ לכל $t\gg 1$ (כלומר $t\gg x_0(s)\gg 1$) מתקיים האי שוויון:

$$|f(t)|\le e^{(s_1+\delta)t}, t\ge x_0(\delta)\gg 1 \quad (1.3)$$

יהי $M=\sup_{0\le t\le x_0(\delta)}|f(t)|\le e^{-(s_1+\delta)t}$ כיוון ש f רציפה למקוטעין אז $M<\infty \Leftarrow$

$$|f(t)|\le Me^{(s_1+\delta)t}, t\in[0,x_0\delta] \quad (1.4)$$

נסמן $M\le M \Leftarrow M=\max\{1,M\}\Rightarrow$

$$|f(t)|\le Me^{(s_1+\delta)t} \quad (1.5)\ \text{לכל}\ t\ge 0$$

אכן, עבור $t\in[0,x_0\delta]$ (1.5) נכון, כיוון ש $M\le M$ (ראה (1.4)), אך עבור $t\gg x_0(\delta)$ (1.5) נכון, כיוון ש$M\ge 1$ (ראה (1.3)). אם כך, (1.5) נכון.

אבל אז לפי (1.5) מעריך הגידול של הפונקציה $f(t)$ יהיה $s_1<s_0$. סתירה $\Leftarrow$

$s_1=s_0 \Leftarrow$ $s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}$. מש"ל.

הגדרה 1.4:

קבוצת כל המקורות נקראת מרחב המקורות.

נביא דוגמא לחישוב מעריך הגידול.

דוגמא 1:

תהי $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \Rightarrow s_0=0$

פתרון:

לפי משפט מתקיים:

$$s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n\right|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|t^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{t}+\ldots+\frac{a_0}{t^n}\right)\right|}{t}=$$
$$=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{n\ln t+\ln\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{t}+\ldots+\frac{a_0}{t^n}\right|}{t}=n\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln t}{t}+\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{t}+\ldots+\frac{a_0}{t^n}\right|}{t}=$$
$$=0+0=0$$

דוגמא 2:

בדוק האם הפונקציה הינה מקור:

$$f(t)=\begin{cases}2e^{5t}, t\geq 0\\ 0, \quad t<0\end{cases}$$

פתרון:

עבור $t\geq 0$ הפונקציה רציפה, $f\equiv 0$ עבור $t<0$. נחשב את מעריך הגידול:

$$s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln 2e^{5t}}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln 2+5t}{t}=5<\infty \Leftarrow f$$ מקור.

דוגמא 3:

בדוק האם הפונקציה הינה מקור:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-2}, t\geq 0\\ 0 \quad\quad ,t<0\end{cases}$$

פתרון:

הפונקציה אינה מקור, כיוון שבנקודה $t=2$ יש לה נקודת אי רציפות מסוג שני.

דוגמא 4:

בדוק האם הפונקציה הינה מקור:

$$f(t)=\begin{cases}e^{t^2} & ,t\geq 0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$$

פתרון:

צריך לבדוק האם: $s_0<\infty$?

$$s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln e^{t^2}}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{t^2}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}t=\infty \Leftarrow$$ הפונקציה אינה מקור.

הערה:

אם $f(t)$ מקור, ומעריך הגידול שלה; אז במקרה הכללי האי שוויון:

$|f(t)|\leq Me^{s_0 t},\ \ t\in R$ לא מתקיים (ראה תרגיל בהמשך), אבל זה כן נכון:

$\left|f(t)\right| \le M(\varepsilon)e^{(s_0+\varepsilon)t}, t\in R$ כאשר $\varepsilon > 0$, רק אם $s_0 \ne -\infty$ (כלומר $s_0 > -\infty$)

תרגיל 5:

$$f(t) := t, t \ge 0 \Rightarrow s_0 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln t}{t} = 0 \Rightarrow$$

$\left|t\right| = \left|f(t)\right| \le Me^{0\cdot t}$ לא נכון $\forall t \in R$. אך $\forall \varepsilon > 0$:

$$\forall t \in R \quad \left|t\right| = \left|f(t)\right| \le M(\varepsilon)e^{\varepsilon t}$$

נזכיר שבמקרה שלנו $f = t$ היא: $f(t) = \begin{cases} t, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

תרגיל 6:

בדוק האם הפונקציה הינה מקור:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ e^{-t^2}, t \ge 0 \end{cases}$$

פתרון:

צריך רק להראות ש $s_0 < \infty$, השאר טריוויאלי.

$s_0 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\left(e^{-t^2}\right)}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{-t^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}}(-t) = -\infty$ כיוון ש $-\infty < \infty$ אז e^{-t^2} מקור. בפרט $f(t) = e^{-t^2} \le Me^{0\cdot t}$ עבור $M = 1$

משפט 1.5:

מתקיימות הטענות הבאות:

1. אם f מקור $\Leftarrow$ $|f|$ גם מקור.

2. אם f_1, f_2 מקורות $\Leftarrow$ $\alpha f_1 + \beta f_2$ מקור עבור $\forall \alpha, \beta \in R$

3. אם $f(t)$ מקור $\Leftarrow$ $f(\alpha t + \beta)$ מקור $\forall \alpha, \beta \in R$

4. אם f מקור $\Leftarrow$ $t^n f(t), n \geq 0$ ו $e^{\lambda t} f(t), \lambda \in R$ מקורות.

5. אם $f(t)$ מקור $\Leftarrow$ $\int_0^t f(\xi) d\xi$ מקור (רציפה).

הוכחה:

נוכיח רק את רק 5. תהי $\varphi(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$. כיוון ש f מקור, אז בכל קטע $[0,t]$ הפונקציה $f(\xi)$ אינטגרבילית אך האינטגרל עם המשתנה הנ"ל - t רציף. יהי s_0 מעריך הגידול של $f(t)$ ו $s > s_1 > s_0$, אז עבור $t \geq 0$:

$$|\varphi(t)| e^{-st} = e^{-st} \left| \int_0^t f(\xi) d\xi \right| \leq e^{-st} \int_0^t |f(\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq M e^{-st} \int_0^t e^{\xi s_1} d\xi = M e^{-st} \frac{e^{s_1 t} - 1}{s_1} \leq \frac{M}{s_1} e^{-(s - s_1)t}$$

$$\leq \frac{M}{s_1} \Rightarrow |\varphi(t)| \leq \frac{M}{s_1} e^{st}, \quad t \geq 0$$

הגדרה 1.6:

תהי $f(t)$ פונקצית מקור. תמונת הפונקציה מסוג לפלס הינה הפונקציה $F(p)$ של המשתנה הקומפלקסי (מרוכב) $p = s + i\sigma$, שמוגדרת כך:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (1.6)$$

כאן האינטגרל נלקח בקטע $[0,\infty)$.

ההתאמה בין f ו F נכתבת בצורה הבאה:

$$f(t) \to F(p) \quad (1.7)$$

תרגיל 7:

מצא את תמונת פונקצית 'הביסייד'

פתרון:

מעריך הגידול של פונקצית הביסייד $\eta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$ (שהיא מקור – כבר בדקנו)

הוא $s_0 = 0$. יהיו $p = s + i\sigma, s > s_0$ אזי:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$ כיוון ש $\mathrm{Re}(p) = s > 0$.

מש"ל. $\Leftarrow$ $\boxed{1 \to \frac{1}{p}}$

משפט 1.7:

לפונקצית מקור כלשהי עם מעריך גדול s_0 התמונה $F(p)$ מוגדרת בחצי המרחב $\mathrm{Re}(p)=s>s_0$ והינה אנליטית (רגולרית) בתחום זה. בכל חצי מרחב $\mathrm{Re}(p)\geq s_1>s$ האינטגרלים $F(p),F'(p)$:

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,F'(p)=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt$$

מתכנסים בהחלט ובמידה שווה לפי p.

מסקנה 1.8:

תהי f מקור, s_0 מעריך הגידול, $f(t)\rightarrow F(p)$, $p=s+i\sigma$, אזי:

$$\lim_{s=\mathrm{Re}(p)\rightarrow\infty} F(p)=0 \quad (1.9)$$

הוכחת מסקנה 1.8:

יהי $_0$ מעריך הגידול של המקור $f(t)$ ו $F(p)$ התמונה שלה:

$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. יהי $s_1=s_0+1 \quad \Leftarrow \quad \mathrm{Re}(p)=s \square s_0 \Rightarrow s \square s_1$

$$\left|F(p)\right|=\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right|\leq\int_0^\infty \left|f(t)\right|e^{-st}dt\leq$$

$$\leq\left[\left|f(t)\right|\leq M(s_1)e^{s_1t}\right]\leq M(s_1)\int_0^\infty e^{s_1t}e^{-st}dt=$$

$$=M(s_1)\int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}dt=M(s_1)\left[-\frac{e^{-(s-s_1)t}}{s-s_1}\Bigg|_0^\infty\right]=M(s_1)\frac{1}{s-s_1}\xrightarrow{s=\mathrm{Re}(p)\rightarrow\infty}0$$

תרגיל 8:

מצא את תמונת הפונקציה $f(t)=e^{at}, a=\alpha+i\beta$, a מספר מרוכב כלשהו.

פתרון:

תחילה נמצא את מעריך הגידול של הפונקציה:

$$s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|e^{(\alpha+i\beta)t}\right|}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\left|e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\beta t)\right|}{t}=$$
$$=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln e^{\alpha t}}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\alpha t}{t}=\alpha$$

לפי משפט 1.7 מחפשים בתחום, $p=s+i\sigma$, $\Leftarrow \mathrm{Re}(p)=s>s_0=\alpha$

$$F(p)=\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^\infty -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\Bigg|_{t=0}^{\infty}$$

$e^{-(p-a)t}=e^{-(s-a)t}\cdot\left[\cos(\sigma-\beta)t+i\sin(\sigma-\beta)t\right]\xrightarrow{t\to\infty}0$ כי $s-a>0$. לכן

$F(p)=\dfrac{1}{p-a}$. מש"ל. $\boxed{e^{at}\to\dfrac{1}{p-a}}$

הערה:

נרכיב את התוצאה של הדוגמא שלנו עם הטענה העיקרית – משפט 1.7. לפי משפט הפונקציה

$$F(p)=\frac{1}{p-a}\quad (1.8)$$

בדומה לתמונת המקור $f(t)=e^{at}$, הפונקציה הינה אנליטית בחצי המישור $\mathrm{Re}(p)>s_0=\alpha$. כעת אנו רואים כי הפונקציה (1.8) הינה אנליטית בכל מקום במרחב המרוכב חוץ מבנקודה $p=\alpha$. כלומר, אם להשתמש במשפט 1.7, אז רק נוכל לומר שכל נקודות החוד של התמונה (1.8) נמצאות משמאל לישר $p=s_0=\alpha$, אך בעצם אין אותן לא משמאל ולא מימין, אך יש רק נקודה בדידה חת בין חצאי המרחב האלה: $\mathrm{Re}(p)>a,\mathrm{Re}(p)<a$.

במקרה הרגיל, כפי שנראה בהמשך: הפונקציה $F(p)$ מוגדרת ואנליטית לא רק בחצי המרחב $\mathrm{Re}(p)>s_0$ (ששם לפי המשפט אינטגרל לפלס מתכנס בהחלט), אך יותר מתמיד גם בכל המרחב חוץ מבנקודות בדידות מסוימות. חשוב לציין, שלפי המשפט, כל הנקודות האלה בכל המקרים נמצאות על הישר עצמו $\mathrm{Re}(p)=s_0$, או משמאל לו. אך ההבדל בין ערכי $F(p)$ עבור התחומים $\mathrm{Re}(p)\le s_0,\mathrm{Re}(p)>s_0$ הוא שבתחום $\mathrm{Re}(p)\le s_0$ הפונקציה $F(p)$ לא מוצגת על ידי אינטגרל לפלס, אך ב$\mathrm{Re}(p)>s_0$ היא בהכרח מוצגת על ידי אינטגרל לפלס. באופן דומה ניתן דוגמא מתורת הטורים; אם $|z|<1$, אז $1+z+z^2+...=\dfrac{1}{1-z}=\Phi(z)$ הפונקציה הזו, אנליטית בכל מקום חוץ מבנקודה $z=1$, מוצגת על ידי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ רק בעיגול $|z|<1$.

תרגיל 8:

לבדוק איזו מהפונקציות הבאות הינה תמונה:

$$F_1(p)=1,F_2(p)=p,F_3(p)=\sin p,F_4(p)=\frac{p}{p-1}$$

פתרון:

לפי משפט 1.8, אם $F(p)$ - תמונה של מקור כלשהו, אז

$$\lim_{s=\mathrm{Re}(p)\to\infty} F(p)=0 \quad (1.9)$$

כלומר (1.9) – זה תנאי הכרחי, לכן זה צריך להתקיים לכל תמונה. את הדרישה (1.9) אף פונקציה מהתרגיל לא מקיימת לכן אף אחת אינה תמונה.

2.התכונות העיקריות של התמרת לפלס

משפט 2.1 (יחידות):

יהיו $f(t), g(t)$ שתי מקורות רציפות ב$[0,\infty)$. אם הן בעלות אותה התמרת לפלס, אזי $f(t)\equiv g(t)$, $t\geq 0$.

דוגמא (למשפט היחידות):

תהי $f(t)$ מקור, ורציפה עבור $t\geq 0$ ו $f(t)\to F(p)$. אז $F(p)$ לא יכולה להיות פונקציה מחזורית ($f(t)\not\equiv 0$)

פתרון:

אם $\forall p$ מתקיים: $F(p)=F(p+w), w\neq 0$ (w מחזור) $\Leftarrow$

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p+w)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\left[f(t)e^{-wt}\right]dt$$ $\Leftarrow$ לפי משפט:

$f(t)\equiv f(t)e^{-wt} \Rightarrow e^{-wt}=1, w\neq 0$ סתירה.

משפט 2.2 (ליניאריות התמרת לפלס):

יהיו $f_1(t), f_2(t),\dots, f_n(t)$ מקורות, ו $F_1(p),F_2(p),\dots,F_n(p)$ התמונות שלהן בהתאמה, כלומר

$$f_1(t)\to F_1(p), \mathrm{Re}(p)>s_1$$
$$f_2(t)\to F_2(p), \mathrm{Re}(p)>s_2$$
$$\dots$$
$$f_n(t)\to F_n(p), \mathrm{Re}(p)>s_n$$

הם מעריכי הגידול בהתאמה של $\left(s_1, s_2, ..., s_n\right)$ $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$.

אז לכל מספרים מרוכבים $c_1, c_2, ..., c_n$ הפונקציה $f(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)$ גם כן הינה מקור ומתקיים:

$$f(t)=c_1 f_1(t)+...+c_n f_n(t) \rightarrow c_1 F_1(p)+...+c_n F_n(p)$$
$$\operatorname{Re}(p)>\max\left\{s_1, s_2, ..., s_n\right\}$$

הוכחה:

מספיק לבדוק את המשפט עבור שני מחוברים. יהיו:

1. $f_1(t), f_2(t)$ פונקציות רציפות למקוטעין עבור $t \in R$
2. $f_1(t)=f_2(t)=0$ עבור $t<0$
3. $\delta>0$, $t \geq 0$, $\left|f_1(t)\right| \leq M_1(\delta) e^{(S_1+\delta)t}$, $\left|f_2(t)\right| \leq M_2(\delta) e^{(S_2+\delta)t}$

ז"א $f_1(t), f_2(t)$ מקורות.

יהיו $c_1, c_2 \in C$ $\Leftarrow$ פונקציה $t \in R$, $f(t)=c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$ הינה מקור.כיוון ש:

1. $f(t)$ -פונקציה רציפה למקוטעין
2. $f_1(t)=f_2(t)=0$ עבור $t<0$ $\Leftarrow$ $f(t)=0$ עבור $t<0$
3. מתקיים הקשר (עבור כל $\delta>0$):

$$\left| f(t) \right| = \left| c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \right| \le \left| c_1 \right| \left| f_1(t) \right| + \left| c_2 \right| \left| f_2(t) \right| \le$$
$$\le \left| c_1 \right| M_1(\delta) \mathrm{e}^{(S_1+\delta)t} + \left| c_2 \right| M_2(\delta) \mathrm{e}^{(S_2+\delta)t} = \left| \text{suposse } S_2 \ge S_1 \right|$$
$$\left[\left| c_1 \right| M_1(\delta) e^{-(S_2-S_1)t} + \left| c_2 \right| M_2(\delta) \right] \mathrm{e}^{(S_2+\delta)t} \le$$
$$\le \left(\left| c_1 \right| M_1(\delta) + \left| c_2 \right| M_2(\delta) \right) \mathrm{e}^{(S_2+\delta)t}, \ t \in R \ , \ \forall \delta > 0. \ \Rightarrow$$

$f(t)$ מקור.כעת הטענה נובעת מליניאריות האינטגרל.ובאמת,אם $\operatorname{Re} p > \max\left\{ S_1, S_2 \right\}$, אזי

$$f(t) = \int_0^\infty \left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \right] \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{dt} =$$

(כיוון ש- $\operatorname{Re} p > \max\left\{ S_1, S_2 \right\}$, אזי קיים אינטגרל מכל מחובר והינו מתכנס במידה שווה)

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$$

הערה:

הדרישה: כל מחובר הינו מקור,במשפט 2.2 מאוד חשובה. אחרת ניתן להגיע למקרה לא חוקי.לדוגמא, פונקצית הוויסייד הינה סכום של שני מקורות:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ 1 \ , \ t \ge 0 \end{cases} = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t \le 0 \\ 1 - \dfrac{1}{t} \ , \ t > 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t \le 0 \\ \dfrac{1}{t} \ , \ t > 0 \end{cases}$$

ולא ניתן להשתמש כאן בתכונת הליניאריות.

תרגיל 1:

מצא תמונת הפונקציה

$$f(t)=3+2e^{-t}$$

פתרון:

ברור כי שני המחוברים הינם מקורות:

$$f(t)=3\cdot 1+2e^{-t}$$

לכן,כיוון ש- $e^{at}\to\dfrac{1}{p-a}$

$$1\to\frac{1}{p}\ ,\ e^{-t}\to\frac{1}{p-(-1)}=\frac{1}{p+1}\quad\Rightarrow$$

$$f(t)\to\frac{3}{p}+\frac{2}{p+1}=\frac{5p+3}{p(p+1)}$$

תרגיל 2:

מצא תמונת $f_1(t)=\cos t\ ,\ f_2(t)=\sin t$

פתרון:

מנוסחת אוילר:

$$f_1(t)=\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}$$

שכאן-סכום מקורות. לכן כיוון ש- $e^{at}\to\frac{1}{p-a}$ נקבל

$$\left.\begin{array}{l} e^{it}\to\dfrac{1}{p-i} \\ e^{-it}\to\dfrac{1}{p-(-i)}=\dfrac{1}{p+i}\end{array}\right\}\cos t\to\frac{1}{2}\frac{1}{p-i}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+i}=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+1}\boxed{=\frac{p}{p^2+1}}$$

באופן דומה:

$$\sin t\to\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right]=\frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2+1}\boxed{=\frac{1}{p^2+1}}$$

לכן:

$$\boxed{\cos t\to\frac{p}{p^2+1}}\ ,\ \boxed{\sin t\to\frac{1}{p^2+1}}$$

תרגיל 3:

מצא תמונות עבור sht ו-cht

פתרון

$$sht=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\rightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right]=\frac{1}{p^{2}-1}$$

$$cht=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\rightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right]=\frac{p}{p^{2}-1}$$

תרגיל 4:

מצא תמונות הפונקציות $f_1(t)=\sin(t+\varphi),\ f_2(t)=\cos(t+\varphi)$.

פתרון:

$$\sin(t+\varphi)=\sin t\cdot\cos\varphi+\cos t\cdot\sin\varphi\rightarrow\left|\begin{matrix}\sin t=\dfrac{1}{p^{2}+1}\\ \cos t=\dfrac{p}{p^{2}+1}\end{matrix}\right|\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\cos\varphi}{p^{2}+1}+\frac{(\sin\varphi)p}{p^{2}+1}=\frac{\cos\varphi+p\sin\varphi}{p^{2}+1}$$

באופן דומה,

$$\cos(t+\varphi)\rightarrow\frac{p\cos\varphi-\sin\varphi}{p^{2}+1}$$

הערה:

בכל התרגילים הנ"ל,איפה שמצאנו תמונות,מתקיים השוויון (ר' מסקנה 1.8):

$$\lim_{s=\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0$$

תרגיל 5:

מצא פונקצית מקור $f(t)$ רציפה עבור $t\geq 0$,כך ש-

$$f(t)\to F(p)=\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2+1}$$

פתרון:

נתון: $F(p)=2\cdot\frac{1}{p}+3\cdot\frac{1}{p^2+1}$.כיוון ש-

$$\Leftarrow \eta(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}\to\frac{1}{p}, \sin t\to\frac{1}{p^2+1}$$

$$2\eta(t)+3\sin t\to\left|Linear\ \ func.\right|\to\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2+1}$$

פונקציה $2\eta(t)+3\sin t$ רציפה עבור $t\geq 0$. לפי משפט היחידות אין עוד מקורות רציפים כאלו שתמונותיהם שווה ל- $\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2+1}$ $\Leftarrow$

$$\boxed{f(t)=2\eta(t)+3\sin t}$$

משפט 2.3 (משפט הדמיון):

תהי $f(t)$ מקור ו-$f(t)\to F(p)$. אזי עבור כל מספר $\alpha>0$ הפונקציה $f(\alpha t)$ גם מקור, וחוץ מכך:

$$f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\ \operatorname{Re}p>\alpha S_0$$

כאן S_0 מעריך הגידול של $f(t)$.

הוכחה:

1. אם $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין $\Leftarrow$ $f(\alpha t)$ גם פונקציה רציפה למקוטעין (כיווץ או מתוח של הגרף לאורך הציר OX)
2. אם $f(t)\equiv 0$ עבור $t<0$ $\Leftarrow$ $f(\alpha t)\equiv 0$ עבור $t<0$, כיוון ש-$\alpha>0$ (עקב כך נדרש התנאי $\alpha>0$)
3. אם $\forall t\geq 0$, $\delta>0$, $|f(t)|\leq Me^{(S_0+\delta)t}$, יהי $t_1=\alpha t$ $\Leftarrow$

$$|f(\alpha t)|=|f(t_1)|\leq Me^{(S_0+\delta)t_1}=Me^{\alpha(S_0+\delta)t_1}=$$

$$=Me^{(\alpha S_0+\delta_1)t},\ \delta_1>0,\ \forall t>0\quad\Rightarrow$$

מעריך הגידול עבור $f(\alpha t)$ שווה αS_0:

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln|f(\alpha t)|}{t}=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|f(\alpha t)|}{\alpha t}\cdot\alpha=\boxed{S_0\cdot\alpha}$$

לכן, $f(\alpha t)$ מקור. $\Leftarrow$ יהי $F_\alpha(p)$ תמונתה $\Leftarrow$

$$F_\alpha(p)=\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt=\begin{vmatrix} dt=\xi \\ dt=\dfrac{d\xi}{\alpha}\end{vmatrix}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\xi)e^{-(p\frac{1}{\alpha})\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Rightarrow f(\alpha t)\to\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\ \mathrm{Re}\,p>\alpha S_0$$

תרגיל 1:

$$\cos t\to\frac{p}{p^2+1}\Rightarrow\cos\alpha t\to\frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}=\frac{p}{\alpha^2\left(\frac{p^2}{\alpha^2}+1\right)}=\frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

$$\sin t\to\frac{1}{p^2+1}\Rightarrow\sin\alpha t\to\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

תרגיל 2:

$$cht\to\frac{p}{p^2-1}\Rightarrow ch\alpha t\to\frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2-1}=\frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$\sin t\to\frac{1}{p^2-1}\Rightarrow \mathrm{s}h\alpha t\to\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2-1}=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

תרגיל 3:

יהי $c>0$. מצא $F(p)$, אם $f(t)=c^t$.

פתרון:

ידוע כי (תרגיל 8 לעיל)

$$f(t)=e^{(\alpha+i\beta)t}\to\left|\forall\alpha,\forall\beta\right|\to\frac{1}{p-a}\,,\ a=\alpha+i\beta$$

אזי

$$c^t=e^{t\ln c}\to\frac{1}{p-\ln c}\,,\ c>0$$

כעת ננסה לקבל את אותה התוצאה דרך משפט דמיון והנוסחא:

$$e^t\to\frac{1}{p-1}\,,\ e^{-t}\to\frac{1}{p+1}$$

יהי $c>1$ $\Leftarrow$ $\ln c>0$ $\Leftarrow$ לפי משפט דמיון:

$$c^t=e^{t\ln c}\to\left|\begin{matrix}\ln c>0\\ \alpha=\ln c\end{matrix}\right|\to\frac{1}{\ln c}\frac{1}{\frac{p}{\ln c}-1}=\frac{1}{p-\ln c}$$

אם $0<c<1$, אזי פורמאלית לפי משפט הדמיון אסור לפעול כך, כיוון ש-
$\alpha=\ln c<0$ עבור $c\in(0,1)$ $\Leftarrow$

$$c := \frac{1}{b}\ ,\ b > 1 \Rightarrow$$

$$c^t = \left(\frac{1}{b}\right)^t = b^{-t} = e^{-t\ln b} = \left| e^{-t} \to \frac{1}{p+1} \right| \Rightarrow \frac{1}{\ln b}\frac{1}{\frac{p}{\ln b}+1} =$$

$$= \frac{1}{p+\ln b} = \frac{1}{p-\ln c}$$

או, באופן דומה:

$$c^t = e^{t\ln c} = e^{-t\ln\frac{1}{c}} = \left|\ln\frac{1}{c} > 0\right| \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\ln\frac{1}{c}}\frac{p}{\ln\frac{1}{c}}+1} = \frac{1}{p-\ln c}$$

תרגיל 4:

מצא תמונותיהם של $\sin^2\alpha t$, $\cos^2\alpha t$.

פתרון:

$$\cos^2\alpha t = \frac{1+\cos 2\alpha t}{2} = \frac{1}{2}\left[1+\cos 2\alpha t\right] = \left| \begin{array}{l} 1 \to \frac{1}{p} \\ \cos t \to \frac{p}{p^2+1} \end{array} \right| \to$$

$$\to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2\alpha}\frac{\frac{p}{2\alpha}}{\left(\frac{p}{2\alpha}\right)^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right];$$

$$\sin^2 \alpha t = \frac{1-\cos 2\alpha t}{2} = \frac{1}{2}\left[1-\cos 2\alpha t\right] = \begin{vmatrix} 1 \to \dfrac{1}{p} \\ \cos t \to \dfrac{p}{p^2+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2\alpha}\frac{\frac{p}{2\alpha}}{\left(\frac{p}{2\alpha}\right)^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right]$$

לכן,

$$\cos^2 \alpha t \to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right]; \sin^2 \alpha t \to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right]$$

בפרט,

$$1 = \cos^2 \alpha t + \sin^2 \alpha t \to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

תרגיל 5:

מצא את התמונה עבור $f(t)=\sin^3 t$

פתרון:

$$\sin^3 t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{-2i}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}-\frac{e^{i(3t)}-e^{-i(3t)}}{2i}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t\Rightarrow\left|\sin t\to\frac{1}{p^2+1}\right|$$

$$\sin^3 t\to\frac{3}{4}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1}=\frac{3}{4}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\frac{3}{p^2+9}=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+9}\right]=\frac{3}{4}\frac{8}{(p^2+1)\left(p^2+9\right)}=\frac{6}{(p^2+1)\left(p^2+9\right)}$$

משפט 2.4 (משפט הזזה):

(ניסוח של המרצה)

יהי $f(t)$ מקור עם מעריך הגידול S_0, $f(t)\to F(p)$ עבור $\operatorname{Re} p > S_0$ ו- $a=\alpha+i\beta$ מספר מרוכב כלשהו. אזי הפונקציה $\left(e^{-at}f(t)\right)$ גם כן מקור עם מעריך הגידול $\left(S_0-\operatorname{Re} a\right)=\left(S_0-\alpha\right)$ ומתקיים הקשר:

(1.10) $e^{-at}f(t)\to F(p+a)$ עבור $\operatorname{Re} p > S_0-\operatorname{Re} a$

הוכחה:

נבדוק כי $e^{-at}f(t)$ מקור:

1. $f(t)$ רציפה למקוטעין $\Leftarrow$ $e^{-at}f(t)$ רציפה למקוטעין
2. $f(t)\equiv 0$ עבור $t<0$ $\Leftarrow$ $e^{-at}f(t)\equiv 0$ עבור $t<0$
3. נמצא מעריך הגידול S_1 של הפונקציה $e^{-at}f(t)$:

$$S_1=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\left|e^{-at}f(t)\right|}{t}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\left(\left|e^{-\alpha t}\cdot e^{-i\beta t}\right|\cdot\left|f(t)\right|\right)}{t}=$$

$$=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{-\alpha t+\ln\left|f(t)\right|}{t}=-\alpha+\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}=S_0-\alpha=$$

$$=S_0-\operatorname{Re} a\Rightarrow$$

$$\left|e^{-at}f(t)\le M(\delta)\right|e^{(S_1+\delta)t}\ ,\ \forall t\ge 0\ ,\ \forall\delta>0$$

אם כך, $e^{-at}f(t)$ מקור עם מעריך הגידול $\boxed{S_0-\operatorname{Re} a}$ $\Leftarrow$

עבור $\operatorname{Re} p > S_0 - \operatorname{Re} a$ קיימת תמונה עבור $e^{-at} f(t) \Leftarrow$

$$\int_0^\infty \left(e^{-at} f(t)\right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p+a)t} dt = \left| \begin{matrix} \operatorname{Re}(p+a) > S_0 \Rightarrow \\ \operatorname{Re} p > S_0 - \operatorname{Re} a \end{matrix} \right|$$

$$= F(p)\Big|_{p=p+a} = F(p+a)$$

***תרגיל 1* (של המרצה):**

ידוע כי $\operatorname{Re} p > 0$, $1 \to \frac{1}{p} \Leftarrow$

$$e^{-at} = e^{-at} \cdot 1 =$$

(משפט ההזזה)

$$= \frac{1}{p+a} \text{ , } \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$$

תרגיל 2:

מצא את התמונה עבור $f(t) = e^{-at} \cos \omega t$

פתרון:

כבר ידוע כי: $\cos \omega t \to \frac{p}{p^2 + \omega^2} \Leftarrow$ לפי משפט ההזזה נקבל:

$$e^{-at} \cos \omega t \to \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

<u>באופן דומה:</u>

$$e^{-at}\sin\omega t \to \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$e^{at}sh\omega t \to \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$$

$$e^{at}ch\omega t \to \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$$

תרגיל 3:

מצא את התמונה עבור המקור $f(t)=e^t\sin^2 t$

פתרון:

$$\Leftarrow\ f(t)=e^t\sin^2 t=e^t\,\frac{1-\cos 2t}{2}$$

$\boxed{e^t \to \frac{1}{p-1}}$ (לפי משפט ההזזה).

בהמשך $\cos t \to \frac{p}{p^2+1} \Leftarrow$ (לפי משפט הדמיון) $\Leftarrow$

$$\cos 2t \to \frac{1}{2}\,\frac{\frac{p}{2}}{\frac{p^2}{4}+1}=\frac{p}{p^2+4}$$

$$\Leftarrow \boxed{e^t \cos 2t \to \frac{p-1}{(p-1)^2+4}} \Leftarrow$$ (לפי משפט ההזזה)$\Leftarrow$

$$e^t \sin^2 t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^t \cos 2t = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(p-1)^2+4-(p-1)^2}{(p-1)\left[(p-1)^2+4\right]} = \frac{1}{2}\frac{4}{(p-1)\left[(p-1)^2+4\right]} =$$

$$= \frac{2}{(p-1)\left[(p-1)^2+4\right]} \Rightarrow$$

$$e^t \sin^2 t \to \frac{2}{(p-1)\left[(p-1)^2+4\right]}$$

תרגיל 4:

מצא את התמונה עבור המקור:

$$f(t) = \text{ch}t \cdot \cos 2t$$

פתרון:

כיוון ש- $\text{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Leftarrow$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t \cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t} \cos 2t$$

בהמשך:

(הדמיון) $\Leftarrow \cos t \to \frac{p}{p^2+1}$

$$\cos 2t \rightarrow \frac{1}{2}\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+4}$$ ⇐ (הזזה)

$$e^t \cos 2t \rightarrow \frac{p-1}{(p-1)^2+4}\,,\ e^{-t}\cos 2t \rightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2+4}$$ ⇐ ⇐

$$f(t)=(\mathrm{ch}t)\cos 2t \rightarrow \frac{1}{2}\left\{\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right\}$$

תרגיל 5:

מצא מקור רציף עבור התמונה

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}$$

פתרון:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+1)^2+2^2}$$ ⇐

כיוון ש- $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2+1}$ ⇐ (דמיון)

$$\sin at \rightarrow \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{a}{p^2+a^2}$$ ⇐ כיוון ש- $(p+1)$ נותן כפל ב- e^{-t} ⇐ נמצא

מקור עבור $\frac{1}{p^2+2^2}$ ⇐

$$\frac{1}{p^2+2^2}=\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2t \to \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}=\frac{1}{p^2+4}$$

עכשיו הזזה:

$$e^{-t}\ \frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \to \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}\bigg|_{p:=p+1} =$$

$$=\frac{1}{(p+1)^2+2^2}=\frac{1}{p^2+2p+5} \quad \Rightarrow$$

לפי משפט היחידות

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t}$$

משפט 2.5 (משפט העיכוב):

תהי $f(t)$ פונקצית מקור עם מעריך הגידול σ_0 ו-a מספר חיובי כלשהו. אזי הפונקציה

$$f_a(t)=f(t-a)=\begin{cases}0\ ,\ t<a\\ f(t-a)\ ,\ t\ge a\end{cases}$$

גם מקור עם מעריך הגידול σ_0 (אותו אחד) ו-

$$f_a(t)=f(t-a)\to e^{-pa}F(p)\ ,\ \operatorname{Re} p>\sigma_0 \quad (1.11)$$

הוכחה:

הוכחת הטענה על המקורות נובעת מכך שהגרף של $f(t-a)$ הינו הזזה בקטע $a>0$ ימינה של כל הגרף של $f(t)$.

בפרט, $f(t-a)$ בעלת אותו מעריך הגידול כמו $f(t)$:

$$\left| f_a(t) \right| = \left| f(t-a) \right| \le Me^{(\sigma_0+\varepsilon)(t-a)} = \left[Me^{-a(\sigma_0+\varepsilon)} \right] e^{(\sigma_0+\varepsilon)t} =$$
$$= M_1 e^{(\sigma_0+\varepsilon)t} \ , M_1 = Me^{-a(\sigma_0+\varepsilon)}$$

כעת-(1.11):

$$F_a(p) \overset{def}{=} \int_0^\infty e^{-pt} f_a(t)dt = \left| \begin{array}{l} f_a(t) = f(t-a) \equiv 0 \\ then \ \ t < a \end{array} \right| = \int_0^\infty e^{-pt} f(t-a)dt =$$
$$= \left| t-a := \xi \right| = \int_0^\infty e^{-p(\xi+a)} f(\xi)d\xi = e^{-pa} \underbrace{\int_0^\infty e^{-p\xi} f(\xi)d\xi}_{F(p)} =$$
$$= e^{-pa}F(p) \Rightarrow \ f(t-a) \to e^{-pa}F(p)$$

מ.ש.ל.

תרגיל 1:

מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(t) = \cos(t-3)$$

(נזכיר, שאצלנו תמיד $f(t) \equiv f(t)\eta(t)$ כאשר $\eta(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ 1 \ , \ t \ge 0 \end{cases}$ פונקצית הביסייד)

פתרון:

כיוון ש- $\cos t \to \dfrac{p}{p^2+1} \Leftarrow$ לפי משפט העיכוב:

$$\cos(t-3) \to e^{-3t} \frac{p}{p^2+1}$$

תרגיל 2:

מצא מקור לפי התמונה:

$$F(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\cdot e^{-4p}$$

פתרון:

נזכר,שאנו מוצאים לפי התמונה מקור רציף יחידי (לפי משפט היחידות).כיוון שהכופל e^{-4p} מתאים להזזת המקור ב-4 יחידות ימינה, לכן קודם כל נמצא את המקור "ללא ההזזה". ז"א מקור עבור $F_1(p)$, כאשר $F_1(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}$.

ב-$F_1(p)$ ישנה הזזה של הארגומנט $(p\to p-1)\Leftarrow$

צריך לרשום $F_2(p)$-תמונה, המתאימה ל-$F_1(p)$ "ללא הזזה"

$$\Leftarrow\ F_2(p)=\frac{p}{p^2+4}=\frac{1}{2}\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}$$

לפי משפט הדמיון: $f(at)\to\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ וכיוון ש-

$\cos t\to\frac{p}{p^2+1}$, אזי נקבל: (לפי משפט דמיון)

$$\Leftarrow \cos 2t \to \frac{1}{2}\frac{\frac{p}{2}}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+4}$$

משפט הזזה $\boxed{e^{-at}f(t)\to F(p+a)}$

לכן,

$$\Leftarrow e^t\cos 2t \to \frac{p-1}{(p-1)^2+4}$$

משפט העיכוב $\boxed{f(t-a)\to F(p)e^{-pa}}$

$$e^{-4p}\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\leftarrow e^{(t-4)}\cos(2(t-4))=$$

$$=e^{(t-4)}\cos(2t-8)$$

תרגיל 3:

הוכח את הקשר:

$$\cos(\omega t-\varphi_0)\to e^{-p\frac{\varphi_0}{\omega}}\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

הוכחה:

תהי $f(t)\to F(p)$ $\Leftarrow$ לפי משפט הדמיון : $f(at)\to\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

תהי $F_1(p)=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $f_1(t)=f(at)$ $\Leftarrow$

לפי משפט העיכוב: $\Leftarrow \quad f_1(t) \to F_1(p)$

נציב: $\Leftarrow \quad f_1(t-t_0) \to F_1(p)e^{-pt_0}$

$$f_1(t-t_0) = f(a(t-t_0)) \to F_1(p)e^{-pt_0} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-pt_0} \Rightarrow$$

$$f(a(t-t_0)) = f(at-at_0) \to \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-pt_0}$$

נבחר t_0 כך ש- $at_0 = \varphi_0 \Leftarrow t_0 = \frac{\varphi_0}{a} \Leftarrow$ נציב:

$$\boxed{f(at-\varphi_0) \to \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-p\frac{\varphi_0}{a}}}$$

אצלנו $F(p) = \frac{p}{p^2+1} \leftarrow f(t) = \cos t \to \Leftarrow$

$$\boxed{\cos(\omega t-\varphi_0)} \to \frac{1}{\omega}\frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2}{\omega^2}+1}e^{-p\frac{\varphi_0}{\omega}} = \boxed{\frac{p}{p^2+\omega^2}e^{-p\frac{\varphi_0}{\omega}}}$$

תרגיל 4:

מצא את התמונה של פונקצית המדרגה, המוגדרת בעזרת הגרף:

או
$$f(t) = \begin{cases} (n+1) \ , \ n\sigma < t < (n+1)\sigma \\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

פתרון:

יהי $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ פונקצית הביסייד $\Leftarrow$

$f(t)=\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\ldots$ ברור ש $f(t)$ - מקור. לצורך כך מספיק למצוא את מעריך הגידול שלה. תהי

$$n\tau<t<(n+1)\tau\Rightarrow n<\frac{t}{\tau}<n+1,\ \frac{1}{(n+1)\tau}<\frac{1}{t}<\frac{1}{n\tau},\ f(t)=n\Rightarrow$$

$$0<\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}<\frac{\ln n}{n\tau}=\frac{1}{\tau}\frac{\ln n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\Rightarrow$$

$$\sigma_0=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln|\ f(t)\,|}{t}=0$$

מש"ל

אזי לכל $\varepsilon>0$ $\exists M(\varepsilon)$ כך ש $t\ge 0$, $\left|f(t)\right|\le M(\varepsilon)e^{\varepsilon t}$

כעת נמצא את התמונה עבור $f(t)$:

$$F(p)=\int_0^\infty (\sum_{k=0}^\infty \eta(t-k\tau))e^{-pt}dt = |\operatorname{Re} p>\varepsilon>0| =$$

$$=\int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{n}\eta(t-k\tau)e^{-pt}+\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-k\tau)e^{-pt}\right]dt = |\,linearity\,| =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty \eta(t-k\tau)e^{-pt}dt+\int_0^\infty\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-k\tau)e^{-pt}dt =$$

$$=\left|\eta(t)\to\frac{1}{p}\Rightarrow\eta(t-k\tau)\to\frac{1}{p}e^{-k\tau p}\right| =$$

לפי משפט העיכוב

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-\tau p}+\frac{1}{p}e^{-2\tau p}+...+\frac{1}{p}e^{-n\tau p}+\varphi_n(p)$$

$$\varphi_n(p)=\int_0^\infty\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-k\tau)e^{-pt}dt$$

נעריך $\varphi_n(p)$:

$$\left|\varphi_n(p)\right|\le\int_0^\infty\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-\tau k)e^{-(\operatorname{Re} p)t}dt=\left|\eta(t-\tau k)\equiv 0, t\ge n\tau, k\ge n\right| =$$

$$=\int_{n\tau}^\infty\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-\tau k)e^{-(\operatorname{Re} p)t}dt\le\left|\sum_{k=n}^{\infty}\eta(t-\tau k)\le M(\varepsilon)e^{\varepsilon t},\ t\ge 0\right|\le$$

$$\le\int_{n\tau}^\infty M(\varepsilon)e^{-(\operatorname{Re} p-\varepsilon)t}dt=\frac{M(\varepsilon)}{Rep-\varepsilon}e^{-(\operatorname{Re} p-\varepsilon)\tau n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

אזי עבור $n \to \infty$ נקבל

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-\tau p} + \frac{1}{p}e^{-2\tau p} + \ldots + \frac{1}{p}e^{-n\tau p} + \ldots =$$

$$= \left\| e^{-n\tau p} \right| = (\operatorname{Re} p \geq \varepsilon > 0) = e^{-n\tau \operatorname{Re} p} < 1 : \operatorname{Re} p > 0 \Big| =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{1}{1 - e^{-\tau p}}$$