תרגול 5 - אינפי 4

6 במאי 2016

תקציר

דוגמאות נוספות של משטחים k-מימדיים. אטלס של משטח, מרחב משיק ושטח פנים של משטח 2-מימדי ב $\mathbb{R}^3$.

1 דוגמא נוספת לפרמטריזציה

תרגיל 1. הראו טורוס סיבוב $\mathbb{T}^2$ המתקבל על ידי סיבוב המעגל $(y-R)^2+z^2=r$ במשישור $y-z$ או $x=0$ סביב ציר ה-z ב $\mathbb{R}^3$ כאשר $R>r$ הוא משטח לפי הגדרה השלישית מהרגול הקודם. כלמר מצאו כיסוי של טורוס על ידי פרמטריזציות חלקות וחח"ע בעלות דרגה מקסימלית.

פתרון: כל נק' על הטורוס אפשר בעצם לבטא בעזרת שתי פרמטרים. הרשאון הוא הזווית שלו במעגל המסובב והיא בין 0 ל 2π ובאיזה זווית המעגל "מסובב", במלים אחרות הזווית שהקטע שמחרב את המרכז של המעגל יוצר עם ציר ה y גם בין 0 ל 2π. כלמר, מרכז המעגל בכל שלב של סיבוב נתון על ידי Rv כאשר

$$v=(\cos\theta,\sin\theta)\,;\ \theta\in[0,2\pi).$$

כלמר, בכל "שלב" של הסיבוב המעגל הוא אוסף של הנק' שמקיים את המשוואה הבאה

$$z^2+\|\alpha v-Rv\|^2=r$$

שאותהה ניתן לבטא בצורה הפרמטרית על ידי

$$(\alpha-R)\,v=(r\cos\phi)\,v,\ z=r\sin\phi$$

ולכן $\alpha-R=r\cos\phi$או במילים אחרות $\alpha=R+r\cos\phi$ ומכאן בעצם מקבלים את הפרמטריזציה

$$f(\theta,\phi)=((R+r\cos\phi)\cos\theta,(R+r\cos\phi)\sin\theta,\sin\phi)$$

עבור $\phi,\theta\in[0,2\pi)$ והעתקה היא חח"ע. העתקה עדיין לא מספיק טובה, שכן אנו מעוניינים למצוא לכל נק' קבוצה פתוחה. אמנם על הבעיה ניתן להגבר בקלות באופן הבא: לכל נק $p\in\mathbb{T}^2$ קיימת נק' יחידה (θ_p,ϕ_p) כך ש $f(\theta_p,\phi_p)$. נגדיר $f_p:\left(\theta_p-\frac{\pi}{2},\theta_p+\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\phi_p-\frac{\pi}{2},\phi+\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{T}^2$ על ידי

$$f_p(\theta,\phi)=((R+r\cos\phi)\cos\theta,(R+r\cos\phi)\sin\theta,\sin\phi).$$

נשים לב במקרה הנ"ל כל קב' פתוחה $\left(\theta_p-\frac{\pi}{2},\theta_p+\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\phi_p-\frac{\pi}{2},\phi+\frac{\pi}{2}\right)$ עוברת לקב' פתוחה בטורוס ושיעקוביאן של העתקה הוא בעל דרגה 2.

2 אטלס של משטח

הגדרה 1. יהי M משטח k-מימדי. אוסף העקות רגולליות $\{\phi_i\}_{i\in I}$ $\phi_i : U_i \to V_i$ כך ש V_i פתוחה ב M לכל i ו

$$\phi\left(U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \phi_i\left(U_i\right)$$

נקראת אטלס ל M.

הערה 1. אלטס אינו יחיד.

דוגמה 1. האוסף $\{\phi_1,\phi_2\}$כאשר

$$\begin{aligned}\phi_1 : (0,2\pi) &\to \mathbb{S}^1\\ \phi_1\left(\phi\right) &= \left(\cos\phi,\sin\phi\right)\\ \phi_2 : (-\pi,\pi) &\to \mathbb{S}^1\\ \phi_2\left(\theta\right) &= \left(\cos\theta,\sin\theta\right)\end{aligned}$$

הוא אטלס למעגל היחידה.

משפט 1. יהי M משטח k-מימדי חלק ב $\mathbb{R}^n$ עם אטלס $\mathcal{A}$ ויהיו $\phi_1 : U_1 \to M$ ו $\phi_2 : U_2 \to M$ כך ש $\phi\left(U_1\right)\cap\phi\left(U_2\right)\neq\emptyset$ אזי העתקה

$$\phi_1^{-1}\circ\phi_2 : \phi_2^{-1}\left(\phi_1\left(U_1\right)\cap\phi_2\left(U_2\right)\right)\to\phi_1^{-1}\left(\phi_1\left(U_1\right)\cap\phi_2\left(U_2\right)\right)$$

היא דפרנציאבילית ברציפות.

נשים לב שאם $\{\phi_i\}_{i\in I}$ הוא אטלס למשטח k-מימדי חלק M ואם נסמן

$$T_{ij} = \phi_i^{-1}\circ\phi_j : \phi_j^{-1}\left(\phi_i\left(U_i\right)\cap\phi_j\left(U_j\right)\right)\to\phi_j^{-1}\left(\phi_i\left(U_i\right)\cap\phi_j\left(U_j\right)\right)$$

לכל זוג i,j עבורו i ו j אינם ריקים אזי T_{ij} היא העתקה חלקה לפי המשפט הקודם ו T_{ji} היא ההופכית שלה. מכלל שרשרת נקבל

$$\left(\det D_{T_{ji}}\left(T_{ij}\left(x\right)\right)\right)\left(\det D_{T_{ij}}\left(x\right)\right) = 1$$

ולכן $\det D_{T_{ij}}\neq 0$ בכל נק T_{ij}מוגדרת.

תרגיל 2. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ משטח חלק עם אטסל $\mathcal{A}$ ותהיינה $\phi : U\to\mathbb{R}^n$, $\psi : V\to\mathbb{R}^n$. נאמר ש ϕ ו ψ חופפות באופן חיובי (שלילי) אם $\det D_{\phi^{-1}\circ\psi}$ חיובית (שלילית). נגדיר $\rho : \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$על ידי

$$.\rho\left(x_1,\ldots,x_k\right) = \left(-x_1,\ldots,x_k\right)$$

נגדיר

$$.\tilde{\psi} = \psi\circ\rho : \rho^{-1}\left(V\right)\to\mathbb{R}^n$$

הוכיחו שאם ϕ ו ψ חופפות שלילית אם ורק אם ϕ ו $\tilde{\psi}$ חופפות חיובית.

פתרון: יהי $x\in\rho^{-1}\left(V\right)$. מתקיים

$$.\phi^{-1}\circ\tilde{\psi}\left(x\right) = \phi^{-1}\circ\psi\circ\rho\left(x\right)$$

לפי כלל שרשרת מתקיים

$$.D_{\phi\circ\tilde{\psi}}\left(x\right) = D_{\phi^{-1}\circ\psi}\left(\rho\left(x\right)\right)\cdot D_{\rho}\left(x\right)$$

אבל ρ היא פשוט העקה לינארית ולכן $D_\rho = \rho$. מתקיים

$$\begin{aligned}\det D_{\phi\circ\tilde{\psi}}\left(x\right) &= \det D_{\phi^{-1}\circ\psi}\left(\rho\left(x\right)\right)\det D_\rho\\ &= \det D_{\phi^{-1}\circ\psi}\left(\rho\left(x\right)\right)\det\rho\\ &= -D_{\phi^{-1}\circ\tilde{\psi}}\left(x\right)\end{aligned}$$

כמו שרצינו להוכיח.

הגדרה 2. נאמר שיריעה חלקה M היא אוריינטבילית אם קיים לה אטלס $\{\phi_i\}$ עבורו לכל T_{ij} שמוגדר מתקיים $\det D_{T_{ij}} > 0$.

תרגיל 3. הראו שכל העתקה עם אטלס בעל שתי מפות כך שאחת לא מתקבלת מהשנייה כמו בתרגיל הקודם הוא אוריינטבילי.

פתרון: יהיו ϕ_1 וϕ_2 העתקות הדרושות. אם $\det D_{\phi_2^{-1}\circ\phi_2}$חיובית, גרמארנו. אחרת נבנה אטלס חדש בעזרת $\phi_1, \tilde{\phi}_2$ כאשר $\tilde{\phi}_2$ מוגדרת כמו בתרגיל הקודם וגמרנו.

תרגיל 4. הראו שספרת היחידה $\mathbb{S}^2$ אוריינטבילית ב $\mathbb{R}^3$.

פתרון: נבנה אטלס בעל שתי מפות בדיוק ל $\mathbb{S}^2$.

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \phi(\theta, \phi) &= (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) \end{aligned}$$

כל נק' ב $\mathbb{S}^2$ פרט ל נק' עבורן $y = 0$ ו $x \geq 0$ נמצאת בתמונה של ϕ.

$$\begin{aligned} \psi : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \psi(\theta, \phi) &= (\cos\theta \sin\phi, \cos\phi, \sin\theta, \sin\phi) \end{aligned}$$

וכל נק' ב $\mathbb{S}^2$ פרט ל נק' עבורן $x \neq 0$ ו $z = 0$ נמצאת בתמונה של ψ והמשלים של ההתנומה של ϕ נמצא בתמונה של ψ ולהיפך. ולפי התרגיל הקודם, זה אומר ש $\mathbb{S}^2$ אוריינטבילית.

3 מישור משיק למשטח

הגדרה 3. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $x \in M$. נאמר ש $v \in \mathbb{R}^n$ הוא וקטור משיק ל M ב x אם קיימים העתקה גזירה $\gamma : I \to M$ ו$t_0 \in I$ כך ש $\gamma(t_0) = I$ ו $\gamma'(t_0) = v$. המרחב הנפרש על ידי הוקטורים המשיקים ל M ב x נקרא מרחב משיק ל M ב x ומסומן על ידי $T_x(M)$. המרחב האפיני $x + T_x(M)$ נקרא מישור משיק ל M ב x.

משפט 2. אם M הוא משטח k-מימדי, אזי לכל $x \in M$ ש, המרחב המשיק ל x הוא מרחב k-מימדי.

אז איך מחשבים מרחב משיק למשטח בפועל? נציג שתי דרכים, לפי ההצגה של המשטח.

משפט 3. יהי M משטח k-מימדי מוגדר על ידי $M = \{a \in \mathbb{R}^n : F(\bar{x}) = 0\}$ כאשר F גזירה ברציפות כך ש $\mathbf{rank} D_F(\bar{x})$מקסימלי לכל $a \in M$. אזי $T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^n : D_F(x) v = 0\}$ ומישור המשיק נתון על ידי $\{v \in \mathbb{R}^n : D_F(x)(v - a) = 0\}$.

הערה 2. נשים לב ש ב $\mathbb{R}^3$ משוואת הרחב המשיק היא

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a)\, x + \frac{\partial F}{\partial y}(a)\, y + \frac{\partial F}{\partial z}(a)\, z = 0.$$

דוגמה 2. מצא את המרחב המשיק למעגל $S = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\right\}$ בנק' $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

פתרון: נשתמש בנוסחא ונקבל

$$\begin{aligned} T_{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}}\right)}(S) &= \left(R\sqrt{2}, -R\sqrt{2}\right)(x, y) \\ &= R\sqrt{2}x - R\sqrt{2}y \\ &= R\sqrt{2}x - R\sqrt{2}y = 0 \\ &\Updownarrow \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

משפט 4. יהי M משטח k-מימדי עם אטלס $\mathcal{A}$. אזי לכל $a \in M$,

$$T_p\left(a\right) = t_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\left(x\right) + \cdots + t_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\left(x\right)$$

כאשר $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ ו $\phi \in \mathcal{A}$ כך ש $a = \phi\left(x\right)$. נציין, שהמישור המתקבל אינו תלוי בבחירה של מפה באטלס או באטלס.

הערה 3. במקרה של משטח דו-מימדי ב $\mathbb{R}^3$ נקבל

$$T = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right) t + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right) s$$

דוגמה 3. מצאו את מרחב המשיק לפרבולואיד

$$z = x^2 + y^2 + 5$$

ב $(1,1,7)$

פתרון: נגדיר $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ על ידי $\phi\left(x,y\right) = \left(x, y, x^2 + y^2 + 5\right)$. על פי הנוסחה נקבל

$$T_{(1,1,7)}\left(\mathbf{Im}\phi\right) = a\left(1,0,2\right) + b\left(0,1,2\right).$$

הערה 4. ניתן לעבור בין שתי הצגות השונות של מרחב המשיק.

אם מרחב המשיק נתון על ידי מערכת משוואות לינאריות, מרחב המשיק הוא פשוט מרחב הפתרונות של מערכת המתאימה. על מנת לעבור מהצגה פרמטרית להצגה של משוואה נבצע את הצעדים הבאים.

1. נמצא את המחב הניצב למרחב המשיק על ידי פתרון המערכת

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \bar{v} \right\rangle = 0.$$

ונקבל מרחב שנפרש על ידי $n-k$ וקטורים.

2. נרשום אותם כשורות של מטריצה A ונפור את המערכת $Ax = 0$.

תרגיל 5. הציגו את המישור המשיק שמצאתם בדוגמא אחרונה בצורה פרמטרית.

פתרון: ראשית, נמצא את המרחב הניצב. הוא נתון על ידי פתרון המערכת:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

המרחב נפרש על ידי הוקטור $(2,2,-1)$. ולכן מישור משיק נתון על ידי

$$2x + 2y - z = 0.$$

4 נורמל להיפר-מישור.

הגדרה 4. משטח $n-1$ מימדי ב $\mathbb{R}^n$ נקרא היפר-משטח.

דוגמה 4. ספרה, פרבולואיד, היפרבולואיד וטורוס הם היפר-משטחים ב $\mathbb{R}^3$.

מרחב ניצב למרחב משיק להיפר-משטח הוא 1 מימדי. וקטור שניצב למישור משטח בנק' x נקרא וקטור נורמל. נביא שתי דרכים למצוא את הנורמל.

1. בהינתן מישור $a_1x_1+\ldots a_nx_n=d$ הנורמל נתון על ידי $(a_1,\ldots,a_n)$.

2. בהינתן מישור ב $\mathbb{R}^3$ שנפרש על ידי וקטורים v ו u, הנורמל נתון על ידי $\bar{n}=v\times u$ **כאשר**

$$\begin{aligned} v\times u &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{j} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2v_3-u_3v_2)\,\mathbf{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\,\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (1,0,0) \\ \mathbf{j} &= (0,1,0) \\ \mathbf{k} &= (0,0,1). \end{aligned}$$

לעיתים אנו מעוניינים בוקטור נורמל מנורמל, ואז הנוסחה הופכת ל

$$\hat{n}=\frac{v\times u}{\|v\|\,\|u\|}.$$

עבור משטח אוריינטבילי שבו עם אטלס מתטים A נורמל מנורמל למשטח בעצם מגדיר שדה וקטורי.

תרגיל 6. מצאו את הנורמל $z=x^2+y^2+5$.

פתרון: המשטח נתון כתמונה של $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $\phi(x,y)=\left(x^2,y^2,x^2+y^2+5\right)$. לכן

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}(x,y,z) &= \frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\right\|\left\|\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\right\|} \\ &= \frac{(1,0,2x)\times(0,1,2y)}{\sqrt{(1+4x^2)(1+4y^2)}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix}}{\sqrt{(1+4x^2)(1+4y^2)}} \\ &= \frac{-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{(1+4x^2)(1+4y^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+4x^2)(1+4y^2)}}(-2x,-2y,1) \end{aligned}$$

5 שטח פנים של היפר-משטח ב $\mathbb{R}^3$

משפט 5. תהי $\phi:D\to\mathbb{R}^3$ כך ש ϕ חלקה על הפנים של D ו $A=\mathbf{Image}\phi$. אזי שטח פנים של A נתון על ידי

$$S(A)=\iint_D \|\phi'_v\times\phi'_u\|\,\mathbf{d}v\mathbf{d}u.$$

למעשה כל משטח ניתן להציג כאיחוד של תמונות של פונ' כאלה, כך השתמונות של הפנים של כל שני תחומים אינן נחתחות. ושטח פנים של המשטח שווה לסכום של השטחי פנים של התמונות.

חשבו את שטח הפנים של מעגל בעל רדיוס R.

פתרון: נבחר פרמטריזציה

$$\begin{aligned}\psi(\theta,\phi) &= (R\cos\theta\cos\phi, R\sin\theta\cos\phi, R\sin\phi)\\ &\theta\in[0,2\pi],\ \phi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

על פי הנוסחה נקבל :

$$\begin{aligned}\psi'_\theta &= (-R\sin\theta\cos\phi, R\cos\theta\cos\phi, 0)\\ \psi'_\phi &= (-R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta\sin\phi, \cos\phi)\\ \psi'_\theta\times\psi'_\phi &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -R\sin\theta\cos\phi & R\cos\theta\cos\phi & 0\\ -R\cos\theta\sin\phi & -R\sin\theta\sin\phi & R\cos\phi\end{vmatrix}\\ &= \left(R^2\cos\theta\cos^2\phi\right)\mathbf{i}+\left(R^2\sin\theta\cos^2\phi\right)\mathbf{j}+R^2(\cos\phi\sin\phi)\mathbf{j}\\ \left\|\psi'_\theta\times\psi'_\phi\right\| &= R^2\sqrt{\left(\cos^2\theta\cos^4\phi+\sin^2\theta\cos^4\phi+\cos^2\phi\sin^2\phi\right)}\\ &= R^2\sqrt{\cos^2\phi}=R^2\cos\phi\\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left\|\psi'_\theta\times\psi'_\phi\right\|\mathbf{d}\theta\mathbf{d}\phi &= R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathbf{d}\theta\mathbf{d}\theta\\ &= 4\pi R^2\end{aligned}$$

הערה 5. כאשר המשטח נתון ישירות כגרף של פונ' דהיינו

$$z=f(x,y)$$

הנוסחה הופכת ל

$$.S(A)=\iint_D\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

תרגיל 7. חשבו את שטח הפנים של של חלק מהסרה $x^2+y^2+z^2=R^2$ שנמצא מעל הפנים של העיגול שבתוך $.x^2-Rx+y^2=0$

פתרון: נשים לב שבמקרה הנ"ל $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ו $.D=\left\{(x,y):\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\le\frac{R^2}{4}\right\}$ על פי הנוסחה השניה נקבל

$$\begin{aligned}S &= \iint_D\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\ &= \iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y\end{aligned}$$

אם נעבור לקואורדניטות קוטביות נקבל:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned}0 &< r^2<Rr\cos\theta\\ 0 &< r<R\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2} &< \theta<\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

והאינטגרל הופך ל

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}\theta \int_{0}^{R\cos\theta} \frac{Rr\mathbf{d}\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$