תרגול 5 - הגדרות ותרגילים

1. הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו $A \subseteq X$ תת קבוצה.. נגדיר את הטופולוגיה על A המושרית מ X להיות $\tau_A = \{A \cap O : O \in \tau\}$. הזוג (A, τ_A) נקרא תת מרחב טופולוגי של (X,τ).
דוגמא: $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה האוקלידית. אזי תת המרחב $A = [0,1)$ הוא הקבוצה A עם הטופולוגיה $\tau_A = \{[0,1) \cap O : \ O \in \tau_{\mathbb{R}}\}$ ולכן למשל $[0, \frac{1}{2})$ פתוח ב A, כחיתוך של $[0,1)$ עם $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ"מ ו τ המטריקה המושרית. תהא A תת קבוצה. הוכיחו כי המטריקה המצומצת ל A משרה את הטופולוגיה המושרית מ τ. כלומר O פתוחה ב A מבחינה מטרית אמ"מ היא פתוחה מבחינה טופולוגית.

3. תרגיל: יהא X מ"ט ו A תת מ"ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אמ"ם קיימת קבוצה סגורה S' ב X כך ש $S = A \cap S'$.

4. תרגיל: יהא X מ"ט ו A תת מ"ט. הוכיחו כי פונקצית ההכלה $f : A \to X$ רציפה. (תזכורת, פונקציית ההכלה $f : A \to X$ היא הפונקציה שמקיימת $f(a) = a$. זוהי לא פונקציית הזהות מכיוון שהתחום והטווח שלה אינם שווים.)

5. תרגיל: תהא $f : X \to Y$ פונקציה. הוכיחו כי $f : X \to Y$ רציפה אמ"מ $f : X \to Im(f)$ רציפה.

6. יהיו X ו Y מרחבים טופולוגיים, ו $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של X. כלומר, הקבוצות O_i פתוחות, ו $X = \bigcup O_i$. נניח שיש פונקציות רציפות $f_i : O_i \to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. כלומר, לכל i, j,

$$f_i|_{O_i \cap O_j} = f_j|_{O_i \cap O_j}$$

אז הן מגדירות פונקציה $f : X \to Y$ בדרך אחת. כלומר, לכל $x \in X$, קיים O_i כך ש $x \in O_i$. נגדיר $f(x) = f_i(x)$. נשים לב שזה מוגדר היטב. כלומר, אם בנוסף $x \in O_j$ אחר, אז $f_i(x) = f_j(x)$.
טענה: הפונקציה הנ"ל רציפה.

7. תרגיל המשך: אותו דבר נכון גם עבור כיסוי סופי של X ע"י קבוצות סגורות. כלומרת אם $C_1, ..., C_n$ קבוצות סגורות ב X, ויש $f_i : C_i \to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על

החיתוכים, אז הפונקציה היחידה $f:X\to Y$ שהן מגדירות, רציפה.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:

(א) T_0 אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1\in U$ ו $x_2\notin U$ או להיפך.

(ב) T_1 אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1\in U$ ו $x_2\notin U$. (שימו לב שזה אומר שקיימת גם V פתוחה כך ש $x_2\in V$ ו $x_1\notin V$)

(ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_2\neq x_1$ קיימות U_1 וU_2 פתוחות כך ש $x_1\in U_1, x_2\in U_2$ ו- $U_1\cap U_2=\emptyset$.

(ד) T_3 אם הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x\notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x\in U_1, S\subseteq U_2$.

(ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות. כלומר, לכל S_1,S_2 סגורות, קיימות U_1,U_2 קבוצות פתוחות וזרות כך ש$S_1\subseteq U_1, S_2\subseteq U_2$.

2. הערה: התכונות בסדר חוזק עולה. כלומר, כל מרחב שהוא T_i, הוא בהכרח גם T_{i-1}, וכן הלאה באינדוקציה.

3. דוגמאות:

(א) כל מ״מ הוא T_4 (ולכן כל T_i), למשל $\mathbb{R}$ למשל (X,disc).

(ב) $X=\{a,b\}$ שרפינסקי $\tau=\{\{a\},X,\emptyset\}$ הוא T_0 בלבד. (לa יש קבוצה פתוחה סביבו שלא מכילה את b, אבל לb אין קבוצה פתוחה סביבו שאינה מכילה את a).

(ג) $(X,\tau_{co-finite})$ כאשר X אינסופית. הוא T_1 אך לא T_2.
הסבר: יהיו $x_1,x_2\in X$. $U_2=\{x_1\}^c$ היא קבוצה פתוחה (כי המשלים שלה סופי) שמקיימת $x_2\in U, x_1\notin U$. כמו כן, $U_1=\{x_2\}^c$ היא קבוצה פתוחה שמקיימת $x_1\in U, x_2\notin U$.
היא לא T_2 כי אחרת, בפרט קיימות U_1,U_2 פתוחות זרות. נקבל $X=\emptyset^c=(U_1\cap U_2)^c=U_1^c\cup U_2^c$. סתירה, כי איחוד של קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.

(ד) $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עם $\tau=\{O:p\notin O\vee|O^c|\leq\aleph_0\}$ הוא T_2 כי לכל $x_2\neq x_1$: בה״כ x_1 ממשי ואז $\{x_1\},\{x_1\}^c$ יעשו את העבודה.

(ה) הוא גם T_3 כי: תהא S סגורה ו $x\notin S$ אם $p\neq x$ אזי $\{x\},\{x\}^c$ פתוחות יפרידו ביניהם. אם $p=x$ אזי S גם פתוחה ו S^cפתוחה לפי הגדרה.

(ו) הוא T_4 כי יהיו S_1,S_2 סגורות זרות. אם p לא שייך לאף אחת אזי S_1,S_2 גם פתוחות. אחרת, בה״כ $p\in S_1$ ואז S_2 פתוחה ומהשלים שלה פתוח לפי הגדרה $S_1\subseteq S_2^c$.

4. תרגיל: כל מרחב טופולוגי סופי ו T_1 הוא דיסקרטי.

5. בכל מרחב X שהוא T_2 מתקיים: לכל סדרה מתכנסת הגבול יחיד

6. תרגיל: האם ההפך הנכון? כלומר, אם לכל סדרה יש גבול יחיד, האם המרחב בהכרח T_2?

7. תרגיל: X הוא T_1 אמ"מ כל נקודון סגור.