אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 10

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

בכל אחד מן המקרים הבאים הגדר את הכפל בסקלר ובדוק שמתקבל מודול מעל החוג המתאים.

א. מרחב וקטורי V מעל שדה F.

ב. אוסף הוקטורים R^n מעל החוג R.

ג. חבורה אבלית A מעל החוג Z, עם הפעולה $n\cdot a=a+...+a$.

ד. חוג מנה R/I מעל R.

שאלה 2

אם R חוג ו M מודול מעל R/I, אז M מודול מעל R לפי הפעולה $r\cdot m=(r+I)\cdot m$.

שאלה 3

א. נתבונן ב R כמודול מעל עצמו. הראה שתת המודולים הם בדיוק האידיאלים השמאליים של R.

ב. החיתוך של משפחה כלשהי של תת מודולים (של מודול נתון) הוא תת מודול.

שאלה 4

יהיו $A,B\le M$ תת מודולים, $\varphi:M\to N$ הומומורפיזים, $K=\ker(\varphi)$.

הוכח: $\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$ אם ורק אם $A\cap(B+K)\subseteq(A\cap B)+K$.

שאלה 5

יהי A חוג, M מודול מעל A נוצר סופית. נסמן $L=\{x\in A:1-x \text{ הפיך }\}$.

א. יהי I אידיאל של A המוכל ב L. הוכיחו שאם $IM=M$ אז $M=0$. (רמז: באינדוקציה על מספר היוצרים של M.

ב. יהי U אידיאל נילפוטנטי ב A. הוכיחו ש U מוכל ב L.

שאלה 6

יהי R חוג קומוטטיבי, M מודול מעליו. תת מודול N של M נקרא גדול ב M (סימון $N<_e M$) אם לכל תת מודול K של M. (השונה מ $\{0\}$), $N\cap K\neq\{0\}$.

א. הוכיחו שאם $N_1,N_2<_e M$ אז $N_1\cap N_2<_e M$.

ב. נגדיר $Ann(x)=\{r\in R:r\cdot x=0\}$. הוכיחו שלכל $x,y\in M$ מתקיים $Ann(x)\cap Ann(y)\subseteq Ann(x+y)$.

ג. תהיי $A(M):=\{x\in M:Ann(x)<_e R\}$ הוכיחו ש $A(M)$ הוא תת מודול של M.