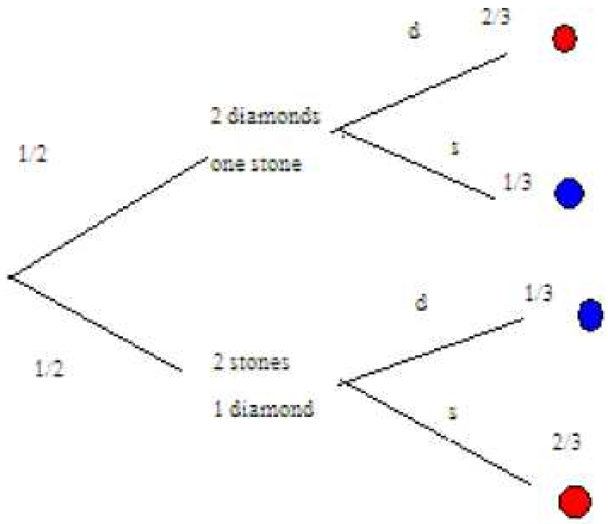
פיתרון לתרגיל 2

תשובה 1:



באדום – סיגל מקבלת את הקופסא הטובה. בכחול- את הפחות טובה.

ההסתברות לטובה : $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)$

הסבר: יש הסתברות שווה שסיגל תבחר כל אחת מהקופסאות. אם בחרה את הקופסא עם 2 היהלומים (העליונה בתרשים) יש לה סיכוי של שני שלישים להציא יהלום (ואז היא בוחרת את הקופסא הזו) וסיכוי של שליש להוציא אבן (ולהחליף קופסא). באופן אנלוגי מפרשים את החלק התחתון בתרשים.

תשובה 2:

בהחלט יתכן. להלן דוגמא :

הפקולטה למדעים מדוייקים		הפקולטה לחוכמת הרחוב		
ניגשו	התקבלו	ניגשו	התקבלו	
1000	200	10	9	נשים
10	1	1000	500	גברים

סה"כ ניגשו 1010 גברים ו- 1010 נשים . התקבלו 501 גברים ורק 209 נשים. לכן ההסתברות לקבלת אישה לאוניברסיטה קטנה יותר. עם זאת 20 אחוז מהנשים שנגשו למדעים התקבלו, מול 10 אחוז מהגברים. גם בפקולטה לחוכמת הרחוב יש 90% קבלה לנשים מול 50% בלבד לגברים.

העניין הוא פשוט. הגברים ברובם הלכו לפקולטה לחכמת הרחוב, בה סיכויי הקבלה גבוהים יותר מבפקולטה למדעים, לעומתם רוב הנשים העדיפו ללכת לפקולטה למדעים, אליה כמובן סיכויי הקבלה קטנים בהרבה. דהיינו אם ניתבונן בנוסחאת ההסתברות השלמה לקבלת אישה מול מקבילתה לקבלת גבר (כאשר החלוקה היא לפקולטות) ההסתברויות

המותנות (בפקולטות) גדולות יותר אצל נשים, אבל החלוקה לפקולטות שהיא בעצם שיקלול ההסתברויות המותנות לקבלת הסתברות הקבלה לאוניברסיטה גורמת לגברים ליהיות בעלי סיכוי קבלה גבוה יותר.

תשובה 3:

1. שימו לב המעבר הראשון הוא בידיוק התרגיל שעשינו בכיתה.

א.

$$P\left(A^C \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P\left(A^C\right)$$

ב.

$$P\left(A^C \cap B^C\right) = P\left(A^C\right) - P\left(A^C \cap B\right) =$$
$$= P\left(A^C\right) - P\left(A^C\right)P(B) = P\left(A^C\right)(1 - P(B)) =$$
$$= P\left(B^C\right)P\left(A^C\right)$$

2. בהגדרה של 'מאורעות A B ו - C בלתי תלויים' יש 4 דרישות. מספיק שאחת מהן לא מתקיימת והם מאורעות תלויים. בשאלה 1 רק הדרישה $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ לא מתקיימת, ולכן A B ו - C תלויים.

תשובה 4:

נחשב לפי $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X < k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$. ההסתברות ששלושתם יבחרו קומה נמוכה או שווה ל K היא: $P(X \leq K) = \left(\frac{k}{5}\right)^3$ לכן

P(X=k)	X: הקומה האחרונה אליה הגיעה המעלית
$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$	1
$\left(\frac{2}{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{7}{125}$	2
$\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{19}{125}$	3
$\left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{37}{125}$	4
$\left(\frac{5}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$	5

תשובה 5:

נשתמש בנוסחאת ההסתברות השלמה. יהי A_i - המלפפון נמצא ברווח ה – i מתוך *n-1* הרווחים. ההסתברות לכל רווח היא $\frac{1}{n-1}$. אם המלפפון נמצא ברווח ה – i משמעו שיש i גבינות משמאלו ו- $n-i$ מימינו. סך האפשרוויות לבחר מקומות עבור גבינת העיזים והצפתית $\binom{n-1}{2}$.סך האפשרויות לבחור להן מקומות כך ש שהמקומות נמצאים משני צידי המלפפון בהינתן שהמלפפון נמצא ברווח ה – i הוא $i \cdot (n-i)$. נסמן ב B – גבינת העיזים והצפתית משני צידי המלפפון. ונחשב

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n-1}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}\frac{i(n-i)}{\binom{n}{2}}=\frac{2}{(n-1)^2n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}ni-\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)$$

$$=\frac{2}{(n-1)^2n}\left(\frac{(n-1)n^2}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)2n}{12}\right)=\frac{6n-4n+2}{6(n-1)}=\frac{n+1}{3n-3}$$

שימו לב שכאשר מספר הגבינות, n, הוא גבוה, ההסתברות מתקרבת לשליש. אם לא היתה מגבלה על המלפפון שעליו להיות דווקא ברווח בין גבינות (ולא בצדדים), אזי ניתן היה לפתור את התרגיל באופן פשוט הרבה יותר: מסדרים שלושה עצמים בשורה, מה הסיכוי שעצם א' יהיה האמצעי. כאן ברור שהתשובה היא שליש. ככל שיש יותר גבינות, כך האיסור על המלפפון להיות בצדדים נהיה זניח (שני המקומות הקיצוניים מהווים חלק יותר קטן מהמבחר שלו) ולכן הסיכוי מתקרב לשליש.

תשובה 6:

נגדיר את המאורעות : L : הסטודנט למד את נושא השאלה . R : הסטודנט ענה נכונה לשאלה. אנו מעוניינים למצוא את $P(L|R)$ כשנתון לנו ש $P(R|L)=1\ , P(L)=p$. כמובן שחוק בייס דרוש כאן :

$$.P(L/R)=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R)}=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R/L)P(L)+P(R/\bar{L})P(\bar{L})}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}\cdot(1-p)}$$

$$.P(L/R)=\frac{pm}{pm+(1-p)}$$

עבור $m=1$ מקבלים $P(L|R)=p$. במקרה זה מאחר ויש רק תשובה אחת אפשרית הסטודנט בכל מקרה יענה נכונה בלי תלות האם למד או לא. לכן ההסתברות שלמד נשארת ללא שינוי ולהתנייה אין משמעות. לכל m אם הסטודנט למד את החומר הוא יענה נכון, לעומת זאת אם לא למד ההסתברות שיענה נכונה שואפת לאפס עם גדילת m . אפשר לראות זאת בצורה ברורה בפירוק שהתבצע במכנה בנוסחא שלעיל.

עבור $m\to\infty$ כצפוי

$$\lim_{m\to\infty} P(L/R) = \lim_{m\to\infty} \frac{pm}{pm+(1-p)} = 1.$$

תשובה 7:

נגדיר את המאורעות הבאים : A : חולצה מיוצרת במפעל A. B_1 : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת יום. B_2 : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת לילה. C : החולצה הנבחרת פגומה.

א.

$$P(C) = P(C/A)P(A) + P(C/B_1)P(B_1) + P(C/B_2)P(B_2)$$
$$= 0.2\cdot 0.4 + 0.1\cdot(0.7\cdot 0.6) + 0.3\cdot(0.6\cdot 0.3) \approx 0.176$$

ב.

$$P(A/C) = \frac{P(C/A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.2\cdot 0.4}{0.176} \approx 0.45$$

ג.

$$P(B_1/C) = \frac{P(C/B_1)P(B_1)}{P(C)} = \frac{0.1\cdot(0.6\cdot 0.7)}{0.176} \approx 0.24$$

ד.

$$P(B_2/C) = \frac{P(C/B_2)P(B_2)}{P(C)} = \frac{0.3\cdot(0.3\cdot 0.6)}{0.176} \approx 0.31$$