מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 7

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו- $p\notin X$.
א' נגדיר אוסף τ' תת-קבוצות של הקבוצה $X'=X\cup\{p\}$ על ידי נוסחה:
$$\tau'=\{\emptyset\}\cup\{U\cup\{p\}|U\in\tau\wedge U\neq\emptyset\}$$
הוכיחו ש-(X',τ') מרחב טופולוגי.
ב' קבעו אם (X',τ') קשיר.

2. יהי X מרחב טופולוגי ויהי $A\subseteq X$ תת-מרחב קשיר.הוכיחו שלכל תת-מרחב $B\subseteq X$, אם $\bar{A}\subseteq B\subseteq A$ אז B קשיר.

3. הוכיחו שאם שני מרחבים טופולוגיים הומאומורפיים אז: או שניהם קשירים מסילתית, או שניהם לא קשירים מסילתית.

4. קבעו אם מ"ט X קשיר מסילתית:
א' $\boldsymbol{X}=\mathbb{R}^2-(\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2|\,\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{1}\}\cup\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2|\,\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{2}\})$
ב' $\boldsymbol{X}=\mathbb{R}^3-(\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^2|\,\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{1},\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\}\cup\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^3|\,\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{2},\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\})$

5. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אך ורק אם הוא סופי.

6. א' יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש-

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha \neq \emptyset$$

ב' יהי (X,τ) מרחב טופטלוגי עם טופולוגיה קו-ספית, כלומר:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{U \subseteq X \middle| U^c - \text{קבוצה סופית}\right\}$$

הכיחו ש- קומפקטי.

7. יהי X מרחב טופולוגי, כך שכל תת-קבוצה סגורה שלו $F \neq X$ - קומפקטית. הוכיחו ש-X קומפקטי.