שילוש מטריצות (מציאת משולשית ובסיס משלש)

הגדרה: העת"ל $T:V\to V$ "ניתנת לשילוש" אם קיים ל-V בסיס B
כך ש- $[T]_B$ משולשית עליונה.

⊛ מטריצה A ניתנת לשילוש אם היא דומה למטריצה משולשית עליונה
כלומר קיימת P כך ש- $P^{-1}AP = M$

● **משפט:** תהי $A\in F^{n\times n}$
אם הפ"א של A מתפרק לגורמים לינאריים (מלל)
אזי A ניתנת לשילוש

הערה: מלל $\not\Rightarrow$ לכסון אבל מלל $\Rightarrow$ שילוש.

[איך נבנה את ה-"P המשלשת"? היינו רוצים כמו בלכסון אבל חסרים
לנו ו"ע ..... (כי אם יש מספיק ו"ע אז אפשר ללכסן ואז היא בפרט משולשית)]

אלגוריתם לשילוש:

● נמצא ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ של A ונמצא וקטורים עצמיים עבור כל ע"ע.

מקרה 1 (הפשוט)
אם חסר רק ו"ע אחד על מנת שיהיו לנו n ו"ע בת"ל כדי שנוכל לבנות את P
אז נוסיף בעצמנו וקטור בת"ל לווקטורים העצמיים שמצאנו ונקבל Q כך
ש- $\underbrace{Q^{-1}AQ = M}_{\text{משולשית}}$

מקרה 2: (חסר יותר מו"ע אחד)
שלב א'
נמצא את הערך העצמי שיש לו הכי הרבה ווקטורים עצמיים בת"ל (כלומר יש לו הכי הרבה ו"ע בבסיס למרחב העצמי)
נניח שקוראים לו λ_1 ובסיס למ"ע (מרחב עצמי) שלו הוא $\{v_1,\dots,v_\alpha\}$
נשלים ווקטורים אלו לבסיס ל-V: $B=\{v_1,\dots,v_\alpha,b_1,\dots,b_t\}$

נסדר אותם בעמודות לקבלת מטריצה $Q = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k & b_1 & \cdots & b_t \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$

ונקבל ש-

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & C & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \end{array}\right)$$

פ״א $P_{Q^{-1}AQ} = (\lambda_1 - \lambda)^k P_C$

$\boxed{\text{שלב ב׳}}$

נשלש את המטריצה C:

נמצא לה ע״ע וו״ע ואם חסרים ו״ע אז נשלים לבסיס כמו בשלב א׳

את הווקטורים $u_1,\dots,u_m$ שקיבלנו נשים במטריצה

$$E = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & & 0 & | & & | \\ \vdots & & & \vdots & u_1 & \cdots & u_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & & | \end{array}\right)$$

נחשב את המט״ר: $E^{-1}(Q^{-1}AQ)E$

אם היא עדיין לא משולשית ונשאר שוב בלוק

שמפריע אז שוב נעשה לו את אותו תהליך

ונמצא מט״ר

$\vdots$

עד שנקבל $\cdots E^{-1}Q^{-1}AQE \cdots =$ משולשית עליונה.

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב ... ונמצא $P_A(x) = (x-3)(x-2)^2$

נמצא ו״ע עבור $\lambda = 3$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $z = t$, $y = t$, $x = -2t + t = -t$

$\Leftarrow$ $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z=t \\ y=0 \\ x=-t \end{matrix}$$

$$\Leftarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

יש לנו סה"כ רק 2 ו"ע, כלומר A לא לכסינה.

(לפי האלג' אפשר להשתמש במקרה הפשוט, בכל זאת נעשה לפי המקרה הלא פשוט כדי להדגים אותו)

ולכן נבחר את הע"ע עם הריבוי הגבוה ו"ע (בת"ל) אצלנו זה לא משנה כי לכל אחד מהם יש אחד. נבחר את $\lambda=3$, $V_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הו"ע שלו.

נשלים אותו לבסיס

$$B=\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\text{נסמן } A' \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

זו המטריצה C מהאלגוריתם

נעשה את אותו תהליך עבור

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_C = (\lambda-2)^2$$

נמצא ו"ע: ...... $V=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נשלים אותו לבסיס

$$B'=\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \ldots$$

ונקבל

$$E^{-1}Q^{-1}AQE = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

אכן משולשית עליונה

בס"ד

לינארית 2 - תרגול 9

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.
"מכפלה פנימית" (/סקלרית) של V היא פונק' $\langle\, ,\, \rangle : V\times V \to \mathbb{F}$
המקיימת את התכונות: 1 אי-שליליות: לכל $v\in V$ $\langle v,v\rangle \geq 0$
ומתקיים: $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

2 סימטריות (הרמטיות): לכל $u,v\in V$ מתקיים:
$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

3 לינאריות במשתנה הראשון: לכל $u,v,w\in V$
ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:
$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

(*) לכל מ"ו V, יש הרבה מ"פ (שונות) על V

דוג' ב-$\mathbb{R}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית (המרחב האוקלידי)

$\vec{v} = (x_1,\dots,x_n)$
$\vec{w} = (y_1,\dots,y_n)$

$$\langle \vec{v},\vec{w}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$ ← המ"פ הסטנד' ב-$\mathbb{R}^n$

א"ז $$\langle v,w\rangle = v\cdot w^T = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

זו אכן מ"פ. נראה שתכונות ההגדרה מתקיימות:

1
$$\langle v,v\rangle = \langle (x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

ואכן $\langle v,v\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0$ לכל i $\iff v=0$

2, 3 לא נוכיח כעשיו (נוכיח אותם בדוג' אחרות)

תוספת א'

ת. היות ואין משמעות לצמוד במספר אז בעצם

$\boxed{\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle}$ ← ב-$\mathbb{R}^n$ ולא ב-$\mathbb{C}^n$!

ומאותה סיבה נקבל גם שבמקרה בה (של $\mathbb{R}^n$ עם מ"פ הסטנדרטית) יש גם לינאריות במשתנה השני כי:

$$\langle w, \alpha u+\beta v\rangle \underset{\text{עפ תכונה 2}}{=} \overline{\langle \alpha u+\beta v, w\rangle} \underset{\text{כי במספר אין משמעות לצמוד}}{=} \langle \alpha u+\beta v, w\rangle \underset{\text{עפ תכונה 3}}{=} \alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$$

$$\underset{\text{עפ תכונה 2}}{=} \alpha\overline{\langle w,u\rangle}+\beta\overline{\langle w,v\rangle} \underset{\text{ממשי}}{=} \alpha\langle w,u\rangle+\beta\langle w,v\rangle$$

לדוגמא: (1) $V=\mathbb{R}^3$ אז $\langle(0,1,-1),(3,2,2)\rangle = 0\cdot 3+1\cdot 2-1\cdot 2=0$

(2) $\mathbb{C}^n$. ניקח לדוג' את $\mathbb{C}^2$.

אם היינו מנסים להגדיר מ"פ כמו ב-$\mathbb{R}^n$ אז היינו מקבלים לדוג':

$\langle(i,i),(i,i)\rangle = i^2+i^2 = -2 < 0$

לא מקיים אי-שליליות!

ולכן, את המ"פ הסטנדרטית מעל $\mathbb{C}^n$ | $\langle v,w\rangle = v\cdot\overline{w}^T$ |

כך: $\langle(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1}+\dots+x_n\overline{y_n}$

קל לראות (תרגיל) שאכן עפ"י הגדרה זו נקבל מ"פ. לדוג' נראה שמתקיים חיוביות: יהי $v=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

$\langle v,v\rangle = \sum x_i\overline{x_i} = \sum|x_i|^2 \geq 0$

דוג' למ"פ לא סטנדרטיות:

1. נגדיר מעל $\mathbb{R}^2$: $\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2+2y_1y_2$

נבדוק ש-3 התכונות עדיין מתקיימות

(1) אי-שליליות: $\langle(x,y),(x,y)\rangle = x^2+2y^2 \geq 0$ ✓

③

תכונה 2: נוכיח

$\forall u,v\in\mathbb{R}^2$, $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} \underset{\mathbb{R}\text{ בשל}}{=} \langle v,u\rangle$$

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2+2y_1y_2$$

$$\langle (x_2,y_2),(x_1,y_1)\rangle = x_2x_1+2y_2y_1$$

ולכן שווים בגלל חילופיות הכפל ב- $\mathbb{R}$

תוספת ג'

תכונה 3: $\forall u,v,w\in\mathbb{R}^2$

$$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \langle \alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

$$=\langle(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

$$=(\alpha x_1+\beta x_2)x_3+2(\alpha y_1+\beta y_2)y_3=$$

$$=\alpha(x_1x_3+2y_1y_3)+\beta(x_2x_3+2y_2y_3)=$$

$$=\alpha\langle(x_1,y_1),(x_3,y_3)\rangle+\beta\langle(x_2,y_2),(x_3,y_3)\rangle$$

$$=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$$

3 התכונות מתקיימות ולכן זו מ"פ

משל

2. דוגמה למ"פ על מטריצות: יהיו $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$

ונגדיר $\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$

סימון: $B^*=\overline{B}^T$

זוהי מ"פ, נוכיח לדוגמה את תכונה 2:

כלומר, צ"ל $\langle A,B\rangle=\overline{\langle B,A\rangle}$ ואכן:

$$\langle A,B\rangle = tr(AB^*) = tr(A\overline{B}^T) = tr(A\overline{B}^T)^T$$

תזכורת:
1. $trA = trA^T$
2. $tr(AB)=tr(BA)$

תוספת ג'

תרגיל: יהי V מ"ו עם מ"פ

יהי $u\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=0$

צ"ל $u=0$

הוכחה: מתקיים לכל $v\in V$ ש- $\langle u,v\rangle=0$ ובפרט עבור u עצמו

$\langle u,u\rangle=0$ ולכן עפ"י תכונה $\underline{1}$ של מ"פ $u=0$ [redacted] **מש"ל**

מרחב מ"פ

תרגיל: יהי מ"פ V, ממימד n ויהיו $v_1,\dots,v_n\in V$

נגדיר מטריצה A לפי: $a_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$

צ"ל $v_1,\dots,v_n$ ת"ל $\iff |A|=0$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח $v_1,\dots,v_n$ ת"ל ונראה $|A|=0$.

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \cdots & \langle v_2,v_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle v_n,v_1\rangle & & & \langle v_n,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

5

$$A=\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_{n-1},v_1\rangle & \cdots & \langle v_{n-1},v_n\rangle \\ \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_1\rangle & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_n\rangle \end{pmatrix}$$

אז השורה האחרונה היא צ"ל של כל השורות שמעליה ולכן $|A|=0$.

$\Rightarrow$ נסו בבית

הגדרה: יהי V ממ"פ. $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$

הנורמה של V היא פונק' שמתקיים:

1. $\|v\|\geq 0$ לכל $v\in V$
   $\|v\|=0 \iff v=0$
2. $\|av\|=|a|\cdot\|v\|$
3. אי-שיוויון המשולש - $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

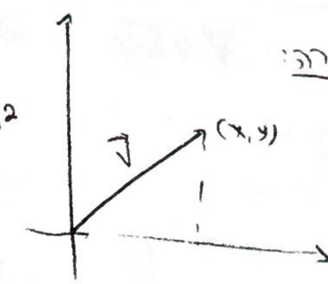
הנורמה המושרית מהמ"פ: $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$

ונית ב-$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית $\|(x,y)\|=\sqrt{\langle(x,y),(x,y)\rangle}=\sqrt{x^2+y^2}$

ב-$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הנ"ל הנורמה היא כמו ערך המרחק שאנו מכירים

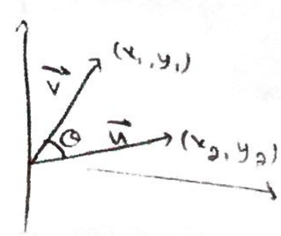
הערה:

$$|(x,y)| = |v| = \sqrt{x^2+y^2}$$



$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}$$

$\frac{uv}{|u||v|}$ = הרבה פעמ' מסמנים



דוג': ב- $\mathbb{R}^3$ נתון $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,1,2)$

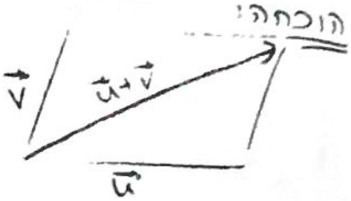
נמצא את הזוית שביניהם:

$$\cos\alpha = \frac{2+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\sqrt{6}\cdot\cancel{3}} \Rightarrow \alpha = 35.264\ldots$$

תרגיל: הוכח את כלל המקבילית מעל $\mathbb{R}$:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$$

הוכחה:



$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

לינאריות במשתנה ראש'

$$= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle + \langle u, u-v\rangle - \langle v, u-v\rangle$$

כי מעל $\mathbb{R}$ יש גם לינ' במשתנה ש'

$$= \underbrace{\langle u,u\rangle}_{=\|u\|^2} + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{=\|v\|^2} + \langle u,u\rangle - \cancel{\langle u,v\rangle} - \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle$$

$$= 2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

$\blacksquare$

$$(*) \quad \cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \quad \text{ב-} \mathbb{R}^n$$

הגדרה הזו נכונה ב-$\mathbb{R}^n$ אבל ניתן להוכיח שההגדרה נכונה בכל ממ"פ (ההוכחה בהרצאה)

$$\boxed{v \underset{\text{מאונך}}{\perp} w \iff \langle v,w\rangle = 0}$$

שני ווקטורים שמאונכים $v \perp w$ נקראים "אורתוגונלים"

מטרשון

אם אשכח

הגדרה: $\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq V$ נקראת "אורתוגונלית" אם לכל $1\le i\ne j\le n$ מתקיים $\langle v_i,v_j\rangle=0$

דוג': $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קב' אורתוגונלית ב- $\mathbb{R}^3$

③

14

② **נורמל** הוא וקטור באורך 1 (כלו' $\|v\|=1$)

נרמול וקטור:

יש וקטור v לא מנורמל ורוצים לנרמל אותו אז $\frac{v}{\|v\|}$ ← מנורמל

דוג': $\binom{2}{7}\in\mathbb{R}^2$ הוא לא מנורמל כי $\|\binom{2}{7}\|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}\neq 1$

ננרמל אותו: $\frac{\binom{2}{7}}{\sqrt{53}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{53}}\\ \frac{7}{\sqrt{53}}\end{pmatrix}$

> **הגדרה:** קבוצה <u>אורתונורמלית</u> היא קב' אורתוגונלית שכל האיברים בה הם באורך 1.

דוג': ① $\left\{\binom{1}{0},\binom{i}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{i}\right\}$ זו דוג' לוקטורים מנורמלים שהם לא קב' אורתונורמלית (א"נ)

כי הם לא מאונכים...

למשל $\left\langle\binom{1}{0},\binom{i}{0}\right\rangle=1\cdot\bar{i}+0\cdot0=-i$

② $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\right\}$ ← בסיס א"נ ל-$\mathbb{R}^2$

③ $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ ← קבוצה א"נ ב-$\mathbb{R}^3$

④ $\left\{\binom{1}{0},\binom{0}{1},\binom{0}{0}\right\}$ ← היא קב' אורתוגונלית ולא <u>א"נ</u>!

(כי וקטור ה-0 נמצא שם ואורכו <u>לא 1</u>)

תרגיל: תהא S קב' אורתוגונלית ק' ש- $0\notin S$

צ"ל S בת"ל

הוכחה:

←

(8)

נניח בשלילה $\underset{\parallel}{S}$ לא בת"ל

$\{v_1, \dots, v_n\}$

נניח בה"כ v_n תלוי באחרים. צ"א

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

(לפחות אחד שהוא $\alpha_i \neq 0$
כי אחרת $v_n = 0$ אבל נתון $0 \notin S$)

נניח $\alpha_j \neq 0$.

$$\langle v_n, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \, , \, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \langle v_i,$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_j \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \dots + \alpha_{n-1} \langle v,$$

כי נתון S אורתוגונלית

$$= \underbrace{\alpha_j}_{\neq 0} \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} \neq 0$$

⇐ קיבלנו $\langle v_n, v_j \rangle \neq 0$ סתירה! הנחנו S אורתוגונלית

מש"ל [redacted]