גבולות אינסופיים באמצעות ε,δ:

נאמר ש: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$.

נאמר ש: $\lim\limits_{x\longrightarrow c} f(x)=\infty$ אם לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $|x-c|<\delta$, מתקיים: $f(x)>M$.

נאמר ש: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)=\infty$ אם לכל $M>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $x>N$ מתקיים: $f(x)>M$.

אפשר לנסח זאת גם ל־$-\infty$, לגבולות חד־צדדיים וכן הלאה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו לפי ההגדרה שמתקיים:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{2}$$

<u>פתרון:</u>

יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $M<0$ כך שלכל $x<M$ מתקיים: $\left|\frac{x+5}{2x+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$,

כלומר:

$$\left|\frac{7}{4x+6}\right|<\varepsilon$$

וזה שקול לכך שיתקיים:

$$|4x+6|>\frac{7}{\varepsilon}$$

נקבע $M=-\frac{6}{4}$. אם $x<M$, אז $|4x+6|=-4x-6$, ולכן אי־השוויון הוא:

$$-4x-6>\frac{7}{\varepsilon}$$

ולכן $x<\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$.

אם כן, לכל $\varepsilon>0$, $M=\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$ (וזהו המינימלי מבין $-\frac{6}{4}$, $\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$).

4. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של A,B על מנת להוכיח ש- $\lim_{x\to\infty}\left(2x^2-5x\right)=\infty$

הוכחה: צריך להראות שלכל $A>0$ ממשי קיים $B>0$ ממשי כל שלכל $x>B$ מתקיים $2x^2-5x>A$.

בס"ד

יהי $A>0$ ממשי $2x^2-5x>A$ אם ורק אם $2x^2-5x-A>0$ אם ורק אם $x<\dfrac{5-\sqrt{25+8A}}{4}$

או $x>\dfrac{5+\sqrt{25+8A}}{4}$ ולכן מספיק לבחור $B>\dfrac{5+\sqrt{25+8A}}{4}$ ממשי.

תרגיל 11.1 הוכיחו בשפה של ϵ,δ שאם $\lim_{x\to c} f(x)=L$ אז $\lim_{x\to c}(af(x))=aL$.

פתרון: אם $a=0$ הטענה ברורה. נניח $a\neq 0$. יהי $\epsilon>0$. מטרה: למצוא $\delta>0$ כך ש $0<|x-c|<\delta$ גורר $|af(x)-aL|<\epsilon$.

נשים לב ש

$$|af(x)-aL|=|a||f(x)-L|$$

אנחנו רוצים שיתקיים

$$|a||f(x)-L|<\epsilon$$

כלומר:

$$|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{|a|}$$

אבל היות ש $\lim_{x\to c} f(x)=L$ אנחנו יודעים שיש $0<\delta$ שעבורו $0<|x-c|<\delta$ גורר ש:

$$|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{|a|}$$

כלומר עבור ערך δ זה יתקיים ש $0<|x-c|<\delta$ גורר ש

$$|af(x)-aL|<\epsilon$$

כנדרש.

רציפות במידה שווה (רבמ"ש)

הגדרת רציפות בנקודה

פונקציה ממשית f רציפה בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אם לכל $x\in\mathbb{R}^*$ מתקיים:
$x\approx c\Rightarrow f(x)\approx f(c)$.

הגדרת רציפות בקטע

פונקציה ממשית f רציפה בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ אם לכל $x\in I$ הפונקציה רציפה ב-x.

(כמובן שאם x היא נקודת קצה, נדרוש רציפות רק מהצד הרלוונטי.)

ראינו את ההגדרה הממשית לרציפות בקטע I:

$$(\forall x\in I)(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\delta\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in I)\left[|x-y|<\delta\rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon\right].$$

הגדרה ממשית של רציפות במ"ש

פונקציה ממשית f רציפה בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ אם מתקיים:

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in I)(\forall y\in I)\left[|x-y|<\delta\rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon\right].$$

(שימו לב להבדל במיקום הכמתים.)

(לנסות להסביר אינטואיטיבית את שינוי המיקום של הכמת.)

הגדרה היפר-ממשית של רציפות במ"ש

פונקציה ממשית f רציפה במידה שווה בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ אם לכל $x,y\in I^*$ מתקיים: $x\approx y\Rightarrow f(x)\approx f(y)$.

- שימו לב: אם נדרוש ש-x יהיה ממשי, נקבל את ההגדרה של רציפות ב-I.

<u>טענה</u>

אם f רציפה במ"ש בקטע I אזי f רציפה ב- I.

<u>הוכחה</u>

תהי $c\in I$ נקודה כלשהי. נוכיח ש- f רציפה ב- c. תהי $x\in I^*$ נקודה המקיימת $x\approx c$. מכיוון ש- $I\subseteq I^*$ נקבל ש- $x,c\in I^*$ ולכן $f(x)\approx f(c)$.

מש"ל

הכיוון ההפוך של הטענה אינו נכון, כפי שניתן לראות בדוגמה הבאה.

<u>דוגמה</u>

נראה שהפונקציה $f(x)=x^2$ אינה רבמ"ש על $\mathbb{R}$.

יהי H מספר אינסופי חיובי כלשהו. נתבונן ב- $x_1=H, x_2=H+\frac{1}{H}$.

מחד מתקיים ש- $x_1\approx x_2$, ומאידך $f(x_1)-f(x_2)=2+\frac{1}{H^2}$, כלומר $f(x_1)\not\approx f(x_2)$.

<u>משפט Heine – Cantor</u>

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת על קטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. אם f רציפה ב- $[a,b]$ אזי היא רציפה במ"ש ב- $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>

יהיו $x,y\in[a,b]^*$ המקיימים $x\approx y$. יש להראות כי $f(x)\approx f(y)$. יהי $c=\operatorname{st}(x)$. נשים לב ש- $c\approx x$ וכן $c\approx y$. מכיוון ש- $a\le x\le b$ ו- $x\approx c$ נקבל $c\in[a,b]$. לפי הנחת המשפט f רציפה ב- c ולכן $f(x)\approx f(c)$ וכן $f(y)\approx f(c)$. לבסוף נקבל $f(x)\approx f(y)$.

מש"ל

תזכורת 11.2 פונקציה f נקראת רציפה במידה שווה בקטע $I \subset \mathbb{R}$ אם לכל $x, y \in I^*$ כך ש $x \approx y$ מתקיים $f(x) \approx f(y)$.

ההבדל מרציפות רגילה: גם x וגם y הם היפרממשיים.

תזכורת 11.3 רציפות במ"ש גוררת רציפות רגילה.

תזכורת 11.4 (משפט היינה קנטור) פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במ"ש.

תרגיל 11.5 בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטע הנתון:

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ בקטע $(0, 1)$.

פתרון: נבחר שני מספרים היפר ממשיים $x = \frac{1}{\ln H}$ ו $y = \dfrac{1}{\ln(H+1)}$. שניהם אינפיניטיסימלים, ולכן כמובן ש $x \approx y$. אבל

$$f(x) = e^{\ln H} = H$$

$$f(y) = e^{\ln(H+1)} = H + 1$$

כמובן ש $f(x) \not\approx f(y)$. ולכן הפונקציה לא רציפה במ"ש.

2. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$

פתרון: ראשית נשים לב שהפונקציה רציפה בקטע. אבל רציפות כמובן לא מבטיחה רציפות במ"ש.כעת נרחיב את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$ באופן הבא:

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אנו טוענים שגם $g(x)$ רציפה. בכל נקודה $x \neq 0$ ברור ש$g(x)$ רציפה. נוודא שהפונקציה רציפה גם ב $x = 0$, כלומר, נוודא ש:

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

ואכן אם ϵ אינפיניטיסימל חיובי אז

$$\epsilon\sin\frac{1}{\epsilon}$$

הוא גם כן אינפיניטיסימל (מפני ש $\sin\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר סופי).

ולכן באמת

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

כלומר $g(x)$ רציפה ב $[0,1]$. היות שזה קטע סגור, $g(x)$ רציפה בו במידה שווה (לפי משפט קנטור). לכן $g(x)$ רציפה במ"ש ב $(0,1)$. (אם פונקציה רציפה במ"ש בקטע מסוים, היא רציפה במ"ש בכל תת קטע).

אבל עבור $x \in (0,1)$ מתקיים $f(x) = g(x)$ כלומר: בקטע $(0,1)$ $g(x)$ ו $f(x)$ הן אותה פונקציה ולכן $f(x)$ רציפה במ"ש ב $(0,1)$.

3. $f(x) = \sin x$ בכל $\mathbb{R}$

פתרון: נוכיח רציפות במ"ש לפי הגדרה: יהיו x, y שני מספרים היפרממשיים כך ש $x \approx y$. אז

$$\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

נשים לב ש

$$2\cos(\frac{x+y}{2})$$

הוא מספר סופי ו

$$\sin(\frac{x-y}{2})$$

הוא אינפיניטיסימל (כי $x - y$ אינפיניטיסימל) ולכן בסה"כ המספר $\sin x - \sin y$ אינפיניטיסימל ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

.4 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$

פתרון: כמו קודם, נבחר שני מספרים אינפיניטיסימלים שבשבילם הערך של $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ אינו קרוב אינפיניטיסמלית. אם H היפרשלם אז נבחר

$$x_1=\frac{1}{2\pi H} \quad x_2=\frac{1}{2\pi H+\frac{\pi}{2}}$$

ואז

$$f(x_1)=2\pi H\sin 2\pi H=0$$

$$f(x_2)=(2\pi H+\frac{\pi}{2})\sin(2\pi H+\frac{\pi}{2})=2\pi H+\frac{\pi}{2}$$

כמובן ש

$$f(x_1)\not\approx f(x_2)$$

ולכן f אינה רציפה במ"ש בקטע הנתון.

תרגיל 11.6 נניח ש $f(x)$ ו $g(x)$ רציפה במ"ש בקטע I. האם $f(x)\cdot g(x)$ גם רציפה במ"ש?

פתרון: לא בהכרח. נניח $f(x)=g(x)=x$ ב $\mathbb{R}$. אפשר להוכיח שהם רציפות במ"ש (תרגיל לבית). אבל מכפלתם היא x^2 שזו לא פונקציה רציפה במ"ש.

תרגיל 11.7 נניח ש $f(x),g(x)$ רציפות במ"ש ב $\mathbb{R}$. האם הרכבתן $f(g(x))$ רציפה במ"ש ב$\mathbb{R}$?

פתרון: כן. אם $x\approx y$ אז גם $g(x)\approx g(y)$ (רציפות במ"ש של g) ולכן גם $f(g(x))\approx f(g(y))$ (רציפות במ"ש של f) ולכן גם ההרכבה רציפה במ"ש כנדרש.