הרצאה 6 – אינפי 3

הוכחה למשפט של ווירשטרס

1) נניח כי f לא חסומה

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in K : ||f(x_m)|| \geq m$$

K קומפקט $\Leftrightarrow$ K חסומה וסגורה

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ – חסומה ולכן $\exists C \geq 0 : ||x_m|| \leq C$

לפי למה Belzana-Weierstrass קיימת תת סדרה $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת $x_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, K סגורה ו$x_0$ נקודת הסתברות ולכן $x_0 \in K$. f רציפה ב-K ולכן בx_0 ולכן $f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$ אז $||f(x_{m_k})|| \to ||f(x_0)||$ אבל $||f(x_{m_k})|| > m_k \to \infty$ ואז $|f(x_0)| = \infty$ בסתירה.

2) $M := \sup_{x\in K} f(x), \quad m := \inf_{x\in K} f(x), \quad m, M \in \mathbb{R}$

נניח כי f לא מקבלת ערך M, כלומר $\forall x \in K : f(x) \neq M, f(x) < M$.

נגדיר $m - f(x) \geq \quad g(x) := \frac{1}{M-f(x)}$

ולכן g רציפה על K, לפי 1) g חסומה:

$$\exists C > 0 : g(x) \leq C\ \forall x \in K$$
$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C$$
$$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$$
$$f(x) \leq M - \frac{1}{C}$$

אבל $M - \frac{1}{C} < M$ – סתירה עם $M = \sup f(x)$

מסקנה

כל נורמות ב$\mathbb{R}^n$ שקולות.

<u>בהוכחה שהופיע בהרצאה היית מעגל לוגי, פה יופיע ההוכחה שהמרצה הביא בהרצאה הבאה.</u>

הוכחה

$$||\ \ ||, |\ \ | \Rightarrow |\ \ | \sim ||\ \ ||$$

נראה כי כל נורמה שקולה ל$|\ \ |_2$, ולכן כל זוג נורמות שקולות.

יהי $||\ \ ||$ נורמה ב$\mathbb{R}^n$, צ"ל $|\ \ |_2 \sim ||\ \ ||$, כלומר $\exists m, M > 0 : m||x||_2 \leq ||x|| \leq M||x||_2$

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 = 1\right\}$$
$$\varphi(x) := ||x||$$

$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$$\left||x|\right| = \left||x_1 e_1 + \cdots + x_1 e_1|\right| \le |x_1|\left||e_1|\right| + \cdots + |x_n|\left||e_n|\right| \le \sqrt{\left||e_1|\right| + \cdots \left||e_n|\right|}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = C\left||x|\right|_2$$

$$\left||x^k - x^0|\right|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,x^k \xrightarrow[||\ \ ||_2]{} x^0$$

$$\left|\left||x^k|\right| - \left||x^0|\right|\right| \le \left||x^k - x^0|\right| \le C\left||x^k - x^0|\right|$$

$$x^k \xrightarrow[||\ \ ||_2]{} x^0 \Rightarrow \varphi(x^k) \to \varphi(x^0)$$

לפי משפט W. $\exists x_{max}, x_{min} \in K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left||x|\right|_2 = 1\right\}$

$$\sup_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{max}) = M$$

$$\inf_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(x_{min}) = m$$

$$\left||x|\right| = \varphi(x) \neq 0, x \in K \Rightarrow m, M > 0$$

$$\exists\{x^{k_i}\}_i, \left||x^{k_i} - x^0|\right|_2 \to 0, x^{k_i} \to x^0$$

$$\forall x \in K : 0 < m \le \left||x|\right|_2 \le M$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$
$$x' = \frac{x}{\left||x|\right|_2} \in K$$
$$m \le \left\|\frac{x}{\left||x|\right|_2}\right\| \le M$$
$$m\left||x|\right|_2 \le \left||x|\right| \le M\left||x|\right|_2$$

רציפות במידה שווה

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

f רציפה במ"ש על Ω אם $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \Omega, \left||x' - x''|\right| < \delta \Rightarrow \left||f(x') - f(x'')|\right| < \epsilon$

משפט Cantor

תהי $f: \underset{\in\mathbb{R}^n}{K} \to \mathbb{R}^m$, נניח כי K קומפקט וf רציפה ב-K, אז f רציפה במ"ש.

הוכחה

נניח שf לא רציפה במ"ש.

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x', x'' \in K, \left||x' - x''|\right| < \delta \land \left||f(x') - f(x'')|\right| \ge \epsilon$$

$$\delta \coloneqq \frac{1}{k}, k = 1,2, \ldots$$
$$x' \coloneqq x'_k$$
$$x'' \coloneqq x''_k$$

$$\left|\left|x'_k - x''_k\right|\right| < \frac{1}{k} \wedge x'_k, x''_k \in K$$

וגם

$$\left|\left|f(x'_k) - f(x''_k)\right|\right| \geq \epsilon$$

לפי למה B-W $\exists x'_{k_i} \to x_0 \in K$

$$x''_{k_i} = \underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x'_{k_i}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(x''_{k_i} - x'_{k_i}\right)}$$

$$x''_{k_i}, x''_{k_i} \to x_0$$

f רציפה ולכן $f\left(x'_{k_i}\right) \to f(x_0), f\left(x''_{k_i}\right) \to f(x_0)$

$$\lim_{i\to\infty}\left(f(x'_k) - f(x''_k)\right) = 0$$

אבל $\left|\left|f(x'_k) - f(x''_k)\right|\right| \geq \epsilon > 0$ בסתירה.

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

בסיס ב$\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_n e_i$$

נורמה של אופרטור

L – פונ' רציפה. גם $\left|\left|L(x)\right|\right|$ רציפה.

$$M \coloneqq \sup_{||x|| \leq 1} \left|\left|L(x)\right|\right|$$

לפי משפט $Weirstrass$ $M < \infty$.

$$\left|\left|L\right|\right| \coloneqq M$$

אי שוויון נורמטיבי

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \left|\left|L(x)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right| * \left|\left|x\right|\right|$$

הוכחה

$x = 0$ טריוויאלי

$x \neq 0$

$$x' = \frac{x}{\left|\left|x\right|\right|} \Rightarrow \left|\left|x'\right|\right| = 1$$

$$\left|\left|L(x')\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$\frac{1}{\left|\left|x\right|\right|}\left|\left|L(x)\right|\right| = \left|\left|L\left(\frac{x}{\left|\left|x\right|\right|}\right)\right|\right| \leq \left|\left|L\right|\right|$$

$$||L(x)|| \leq ||L||||x||$$

גזירות ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

$$\alpha(x), \beta(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

$$\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big), x \to p$$
$$\frac{\alpha(x)}{||\beta(x)||} \xrightarrow[x\to p]{} 0$$

הגדרה שקולה: $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big) \Leftrightarrow \alpha(x) = \epsilon(x)\beta(x), \epsilon(x) \xrightarrow[x\to p]{} 0$

$$\alpha(x) \to 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o(1)_{x\to p}$$

גזירות ודיפרנציאל

$$n = 1$$

f גזירה בa אם"ם $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} := f'(a)$

$$\epsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
$$f(x) - f(a) = k(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$
$$x - a = h$$
$$\boxed{f(a+h) = f(a) + kh + \epsilon(a+h)h \qquad \epsilon(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

הגדרה

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$a \in \Omega$ נקודה פנימית, $a \in \Omega^o$

אומרים כי f דיפירנציאלית (גזירה) בנקודה a אם מתקיים קיים אופרטור ליניארי $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)||h||$$

עבור $\epsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $||h|| < \delta$. $\epsilon(h)||h|| = o(||h||), h \to 0$

אופרטור L דיפרנציאל של f בנקודה a.

$$L := df_a$$
$$h \in \mathbb{R}^n : L(h) = df_a(h)$$

משפט

df_a הוא יחיד.

הוכחה

נניח כי $\exists L_1, L_2$ אופ' לינא'

$$f(a+h)-f(a)=L_1(h)+\epsilon_1(h)\|h\|$$
$$f(a+h)-f(a)=L_2(h)+\epsilon_2(h)\|h\|$$
$$0=L_1(h)-L_2(h)+\left(\epsilon_1(h)-\epsilon_2(h)\right)\|h\|$$

נקבע $0\neq h_0\in\mathbb{R}^n$

$$h=th_0, t\in\mathbb{R}$$
$$0=tL_1(h_0)-tL_2(h_0)+\left(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\right)|t|\|h_0\|$$
$$0=L_1(h_0)-L_2(h_0)+\left(\epsilon_1(th_0)-\epsilon_2(th_0)\right)|t|\|h_0\|\frac{1}{t}$$
$$t\to 0: 0=L_1(h_0)-L_2(h_0)\Rightarrow L_1=L_2$$

דוגמא

$$f(x,y,z)=(xyz.x+z^2)$$
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, a=(2,1,0)$$
$$h=(h_1,h_2,h_3)$$
$$f(2+h_1,1+h_2,h_3)=\left((2+h_1)(1+h_2)h_3, 2+h_1+h_3^2\right)=(h_3(2+h_1+2h_2+h_1h_2), 2+h_1+h_3^2)=$$
$$(2h_3+h_1h_3+2h_2h_3+h_1h_2h_3, 2+h_1+h_3^2)=(0,2)+(2h_3,h_1)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

זה $o(\quad)$ כי $|h_ih_j|\le\frac{|h_i|^2+|h_j|^2}{2}\le\frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^3}\right)^2}{2}$

$$f(a)=(0,2), df_a=(2h_3,h_1)$$
$$\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}$$