1

מטלה מס' 3 - פתרונות סופי"ם

1 (א) $U(x,y) = \boxed{x^2y + 3xy^2 - y^3 = C}$

(ב) $U(x,y) = \boxed{3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C}$

(ג) $U(x,y) = \boxed{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$

2 (א) $x \cdot \frac{dy}{dx} = (3x^2\cos y - \sin y)\cos y$

פתרון:

נרשום את המשוואה בצורה: $\underbrace{(3x^2\cos y - \sin y)\cos y}_{P}\,dx \underbrace{- x}_{Q}\,dy = 0$

נבדוק האם המשוואה היא מדויקת

$P_y = -3x^2 \cdot 2\cos y \sin y - \cos 2y$

$Q_x = -1$

$\neq \Rightarrow$ אינה מדויקת

נחפש גורם אינטגרציה μ שיהפוך את המשוואה למדויקת:

* אם μ היא פונק' של y בלבד: $\mu = \mu(y)$ אזי:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{-P}$$

והפתרון: $\mu(y) = e^{\int \left(\frac{P_y - Q_x}{-P}\right) dy}$ (כמו שאלה מס' 3).

נבדוק:

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{-3x^2 \cdot 2\cos y \sin y - \cos 2y + 1}{-(3x^2\cos y - \sin y)\cos y}$$

$$= \frac{-2(3x^2\cos y - \sin y)\sin y}{-(3x^2\cos y - \sin y)\cos y} = 2\tan y$$

אכן, קיבלנו e ($\mu = \mu(y)$).

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{P_y - Q_x}{-P}\right) dy} = e^{\int 2\tan y\, dy}$$

Scanned by CamScanner

(2)

$$\mu(y) = e^{\int 2\tan y\, dy} = e^{\ln \frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

נכפול את המשוואה (*) ב $\frac{1}{\cos^2 y}$ ונקבל:
(מותר כי $\cos^2 y \neq 0$)

משוואה מדויקת:

$$\underbrace{(3x^2 - \tan y)}_{P}dx - \underbrace{\frac{x}{\cos^2 y}}_{Q}dy = 0$$

נפתור אותה:

$$U_x = P \Rightarrow U(x,y) = \int (3x^2 - \tan y)\,dx = x^3 - x\tan y + h(y)$$

$$U_y = -\frac{x}{\cos^2 y} + h'(y) = \underbrace{-\frac{x}{\cos^2 y}}_{Q}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C_1$$

ולכן

$$U(x,y) = x^3 - x\tan y + C_1 = C_2$$

פתרון כללי של המשוואה

$$U(x,y) = \boxed{x^3 - x\tan y = C}$$

(2) $\mu = \mu(x)$,

$$U(x,y) = \boxed{\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = C}$$

(2) $\mu = \mu(x)$,

$$U(x,y) = \boxed{x + \frac{\sin^2 y}{x} = C}$$

(3) בכיוון

(4) פתרון: מחפשים $\mu(x,y) = \mu(xy)$ נסמן $z = xy$ אזי כך שהמשוואה
(5)
תהיה מדויקת נקבל:

$$[\mu(z)\cdot P(x,y)]_y = [\mu(z)\cdot Q(x,y)]_x$$

$$\mu'(z)\cdot z_y \cdot P + \mu(z)\cdot P_y = \mu'(z)\cdot z_x \cdot Q + \mu(z)\cdot Q_x$$

$$\Rightarrow \mu'(z)\cdot x \cdot P + \mu(z)\cdot P_y = \mu'(z)\cdot y \cdot Q + \mu(z)\cdot Q_x$$

$$\mu'(z)(x\cdot P - yQ) = \mu(z)(Q_x - P_y)$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{x\cdot P - y\cdot Q}}_{f(z)}$$

ולכן נוסחה ל $\mu(x,y)$ במקרה זה:

$$\mu(x,y) = \mu(xy) = \mu(z) = e^{\int f(z)dz}$$

ג) היעזר בסעיף ב ופתור את המשוואה:

$$\underbrace{\left(3x + \frac{6}{y}\right)}_{P} dx + \underbrace{\left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)}_{Q} dy = 0$$

פתרון:

מסעיף ב גילנו כי:

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \underbrace{\frac{Q_x - P_y}{x\cdot P - y\cdot Q}}_{f(z)}$$

נחשב:

$$\frac{Q_x - P_y}{x\cdot P - y\cdot Q} = \frac{\frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^2} + \frac{6}{y^2}}{x\cdot\left(3x + \frac{6}{y}\right) - y\left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{xy} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \mu(z) = e^{\int f(z)dz} = e^{\int \frac{1}{z}dz} = e^{\ln z} = z^2$$

כלומר $\mu(x,y) = xy$ הינו גורם אינטגרציה של המשוואה

נכפול בו את המשוואה ונקבל:

$$\underbrace{(3x^2y + 6x)}_{P} dx + \underbrace{(x^3 + 3y^2)}_{Q} dy = 0$$

$$P = U_x \Rightarrow U = \int P dx + h(y) = \int (3x^2y + 6x)dx + h(y)$$

$$= x^3y + 3x^2 + h(y)$$

נגזור לפי y:

$$U_y = x^3 + h'(y) = \underbrace{x^3 + 3y^2}_{Q} \Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3$$

ולכן

$$U(x,y) = \boxed{x^3y + 3x^2 + y^3 = C}$$

Scanned by CamScanner

5 א נרשום את המשוואה כצורה:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$(\underbrace{4x^3y + 2xy^3 - \gamma \cdot xy^3}_{P})dx + (\underbrace{y^4 - 4x^4 + \gamma\left(\frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4\right)}_{Q})dy = 0$$

כדי שהמשוואה תהיה מדויקת נדרש:

$$P_y = Q_x$$

כלומר:

$$4x^3 + 6xy^2 - 3\gamma \cdot xy^2 = -16x^3 + 10\gamma \cdot x^3$$

נמצא γ שמקיים את:

$$20x^3 - 10\gamma x^3 + 6xy^2 - 3\gamma \cdot xy^2 = 0$$

וזה יכולות שמתקיים עבור $\underline{\gamma = 2}$.

ב

$$U(x,y) = \boxed{x^4y + \frac{2}{5}y^5 = C}$$