פתרון מבחן מועד א' - חדו"א 1 לאודיסאה – 27/01/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{\sin(x+sin(x))}{x+\sin(x)}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{x+\sin(x)}{x}=1\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{2}{9}\cdot 2=\frac{8}{9}$$

כאשר הגבול האחרון הוא

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right)=2$$

ב. $\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(e^x-1)$

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(e^x-1)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{-\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^x\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot(-x)=1\cdot 1\cdot 0=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!-2^n}$

$$\lim\frac{n^2}{n!-2^n}=\lim\underbrace{\frac{n^2}{n!}}_{\to 0}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\to 0}}=0\cdot 1=0$$

כאשר את הגבול $\frac{2^n}{n!}\to 0$ נוכיח באמצעות כלל המנה

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\to 0<1$$

כיוון שגבול המנה של הסדרה החיובית קטן מאחד, הסדרה שואפת לאפס.

ובאופן דומה נוכיח כי $\frac{n^2}{n!}\to 0$ באמצעות כלל המנה

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n+1}\to 1^2\cdot 0=0$$

הערשה: ננסה לפתור את התרגיל בלי הטריק באמצעות חישוב גבול המנה של הסדרה המקורית

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)!-2^{n+1}}\cdot\frac{n!-2^n}{n^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{n!-2^n}{(n+1)!-2^{n+1}}\rightarrow$$ שוב הוצאת גורם משמעותי

.2

א. חשבו את $\int\frac{x^4-x^3+5x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

נבצע חילוק פולינומים (בוולפראם):

$$\frac{x^4-x^3+5x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=x+\frac{4x^2-x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{4x^2-x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$4x^2-x-1=A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$2=2A\rightarrow A=1$$

נציב $x=0$

$$-1=1-C\rightarrow C=2$$

נציב $x=-1$

$$4=2-2(-B+2)\rightarrow B=3$$

$$\frac{4x^2-x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{3x+2}{x^2+1}$$

$$\int\frac{1}{x-1}dx=\ln\ |x-1|$$

$$\int\frac{3x+2}{x^2+1}dx=3\int\frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$
$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+2\arctan(x)$$

סה"כ האינטגרל הוא

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+2\arctan(x)+C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(e^x-1)}dx$

מדובר בפונקציה חיובית כיוון ש $e^x - 1 > 1$ בתחום, ולכן מותר לבצע מבחן השוואה גבולי.

ננסה להשוות עם $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ (המתבדר)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(e^x-1)} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(e^x-1)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \to 1$$

ולכן האינטגרלים חברים וגם האינטגרל שלנו מתבדר.

הערה קטנה:

$$\ln(e^x-1) = \ln\left(e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) = x + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$$

זה רמז להשוואה עם $\int \frac{1}{x}$

אפילו מחוכם יותר:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\ln(e^x-1)}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\ln(e^x)}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

.3

א. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x^2) - 2x\arctan(x)$

נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 2\arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2} = -2\arctan(x)$$

לכן f' חיובית בשליליים, ושלילית בחיובים, כלומר סה"כ

הפונקציה f עולה בתחום $(-\infty, 0]$ ויורדת בתחום $[0,\infty)$

כלומר באפס היא מקבלת המקסימום הגלובאלי.

$$f(0) = 0$$

כלומר הערך המקסימלי של הפונקציה הוא אפס.

ב.   לכל ערך של a, מצאו את כמות הפתרונות של המשוואה $\ln(1+x^2) = 2a \cdot \arctan(x)$

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \ln(1+x^2) - 2a \cdot \arctan(x)$$

שוב נחשב תחומי עלייה וירידה.

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2a}{1+x^2} = \frac{2(x-a)}{1+x^2}$$

הנגזרת חיובית כאשר $x > a$ ושלילית כאשר $x < a$

לכן h עולה בתחום $[a, \infty)$ ויורדת בתחום $(-\infty, a]$

כלומר הערך המינימלי של h מתקבל בנקודה a.

$$h(a) = \ln(1+a^2) - 2a \cdot \arctan(a)$$

נשים לב כי

$$h(a) = f(a)$$

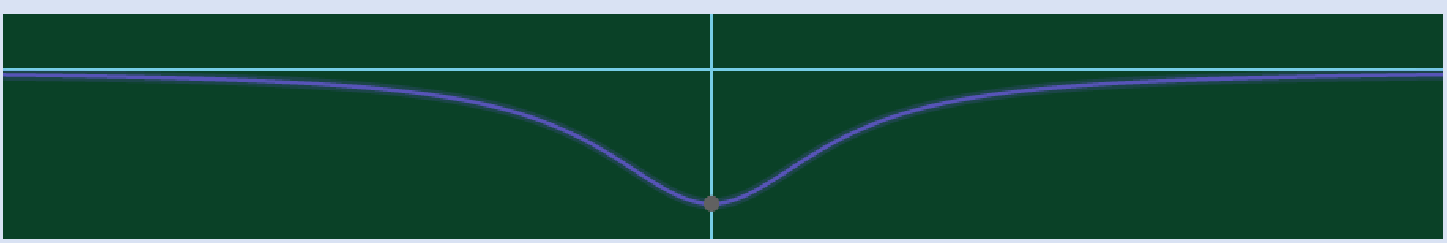
ולכן מסעיף א', אם $a = 0$ אז $h(a) = f(a) = 0$

אם $a \neq 0$ אז $h(a) = f(a) < 0$

כעת, אם $a = 0$ הפונקציה h מקבלת מינימום גלובאלי באפס שהוא אפס לפניו ואחריו היא חיובית ולכן נקבל חיתוך יחיד עם הציר, ולכן פתרון יחיד למשוואה המקורית.

אם $a \neq 0$ הערך המינימלי שלילי.

הערה: שימו לב – לא ברור כעת אם יש נקודות חיתוך כלל, כמו בשרטוט הבא:



כעת נבדוק את הקצוות של תחום העלייה ותחום הירידה

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) - 2a \cdot \arctan(x) = \left\{\infty - 2a \cdot \frac{\pi}{2}\right\} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) - 2a \cdot \arctan(x) = \left\{\infty + 2a \cdot \frac{\pi}{2}\right\} = \infty$$

לכן קיימת נקודה מעל הציר לפני a וקיימת נקודה מעל הציר אחרי a.

וסה"כ לפי ערך הביניים (הפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות) בכל אחד מתחומי העלייה/ ירידה יש חיתוך, אין יותר מחיתוך אחד בתחום מונוטוניות, סה"כ 2 חיתוכים עם הציר ולכן 2 פתרונות למשוואה.

4. תהי פונקציה f כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) > 0$ וכן f רציפה בx.

א. הוכיחו/הפריכו: בהכרח קיימת נק' c עבורה $\frac{f(c)}{c} = 1$.

זה שקול לקיום נקודה $c \neq 0$ כך ש $f(c) = c$

ננסה למצוא הפרכה, ננחש $f(x) = x^2 + 1$

ברור שזו פונקציה חיובית ורציפה. נוכיח שלכל c מתקיים כי $f(c) \neq c$

אחרת

$$c^2 + 1 = c$$

$$c^2 - c + 1 = 0$$

הדיסקרימיננטה $1 - 4 < 0$ שלילית ולכן אין פתרון למשוואה הריבועית.

ב. הוכיחו כי אם $f(1) = \frac{1}{2}$ קיימת נקודה c בה $\frac{f(c)}{c} = 1$.

שוב, צ"ל שקיימת $c \neq 0$ כך ש

$$f(c) = c$$

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

נציב נקודות

$$h(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 < 0$$

$$h(0) = f(0) - 0 > 0$$

ולכן לפי ערך הביניים יש חיתוך עם הציר בתחום $(0,1)$ ולכן קיימת $0 \neq c \in (0,1)$ כך ש $h(c) = 0$ וסיימנו.

5. תהי סדרה המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_{n+1} = \frac{5a_n+8}{2a_n+5}$ וכן נתון כי $a_1 = 3$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית יורדת.

על מנת לחוש את הסדרה נציב כמה ערכים ראשונים

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = \frac{23}{11}, \dots$$

אוקיי that escalated quickly, נעצור כאן.

צריכים להוכיח כי לכל n מתקיים כי

$$a_{n+1} \leq a_n$$

כלומר צריך להוכיח כי

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

$$\frac{5a_n + 8}{2a_n + 5} - a_n \leq 0$$

$$\frac{5a_n + 8 - 2a_n^2 - 5a_n}{2a_n + 5} \leq 0$$

$$\frac{2(2 - a_n)(2 + a_n)}{2a_n + 5} \leq 0$$

מספיק להוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > 2$ ואז יוצא שהוכחנו שהסדרה יורדת.

את זה כן נעשה באינדוקציה

בדיקה: אכן $a_1 > 2$.

יהי n עבורו $a_n > 2$ צ"ל כי $a_{n+1} > 2$

צ"ל

$$a_{n+1} > 2$$

$$\frac{5a_n + 8}{2a_n + 5} > 2$$

המכנה חיובי מהנחת האינדוקציה ולכן אפשר לכפול בו בלי לפגוע בסימן אי השיוויון

$$5a_n + 8 > 4a_n + 10$$

שקול ל

$$a_n > 2$$

שזה נכון מהנחת האינדוקציה.

ב. חשבו את גבול הסדרה.

הוכחנו בסעיף קודם כי הסדרה מונוטונית יורדת, וכמו כן הוכחנו שהיא חסומה מלרע ע"י 2.

סה"כ היא מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת למספר סופי.

נסמן $a_n \to L$ ונשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{5a_n + 8}{2a_n + 5}$$

$$L = \frac{5L + 8}{2L + 5}$$

הערה: כיוון שכל איברי הסדרה גדולים מ2, נובע כי הגבול $L \geq 2$ ולכן המכנה אינו מתאפס.

$$2L^2 + 5L - 5L - 8 = 0$$

$$L^2 = 4$$

$$L = \pm 2$$

אבל כיוון ש $L \geq 2$ נובע כי $L = 2$.

סה"כ הוכחנו כי $a_n \to 2$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3}}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^3}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}}$$

מדובר בסדרת סכומי רימן של הפונקציה $\sqrt{x}$ הרציפה בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ ובחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$

ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n \to \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

ב.   מצאו מספר רציונאלי $a \in \mathbb{Q}$ המקיים כי

$$\frac{1}{\sqrt{e}} < a < \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{100}$$

כנראה שמבקשים מאיתנו לקרב את $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

אם נסמן את השגיאה בקירוב בR

$$R = \frac{1}{\sqrt{e}} - a$$

האי שיוויון הראשון שדרוש, $\frac{1}{\sqrt{e}} < a$ בעצם שקול ל $\frac{1}{\sqrt{e}} - a < 0$

כלומר רוצים ש $R < 0$.

במילים: השגיאה היא מה שחסר לקירוב בשביל להיות הערך האמיתי, שהרי הערך האמיתי = השגיאה + הקירוב

לכן אם השגיאה חיובית, זה אומר שחסרה לנו תוספת לקירוב על מנת להיות שווה לערך האמיתי, כלומר הקירוב קטן מהערך המקורי.

כאן, אנחנו רוצים שהקירוב יהיה גדול מהערך האמיתי, ולכן אנחנו רוצים שגיאה שלילית.

כעת לגבי הצד השני של אי השיוויון. דרשו כי $a < \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{100}$

כלומר

$$R = \frac{1}{\sqrt{e}} - a > -\frac{1}{100}$$

סה"כ הדרישה היא ש

$$-\frac{1}{100} < R < 0$$

נקרב את $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ע"י הפונקציה $f(x) = e^x$, הנקודה הרצוייה היא $x = -\frac{1}{2}$ הנקודה המצוייה $x_0 = 0$

ננחש סדר $n = 3$, אז השגיאה היא

$$R_3 = \frac{e^c}{4!}\left(-\frac{1}{2} - 0\right)^4 = \frac{e^c}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}$$

כאשר $-\frac{1}{2} < c < 0$

אבל יצא ש $R > 0$ ולכן זה לא מתאים!

ננסה סדר $n = 4$

$$R_4 = -\frac{e^c}{5!\,2^5}$$

זה אכן שלילי.

כעת, כיוון ש e^x פונקציה מונוטונית עולה וכיוון ש $-\frac{1}{2} < x < 0$

$$e^{\left(-\frac{1}{2}\right)} < e^c < e^0 = 1$$

$$\frac{e^c}{5!\,2^5} < \frac{1}{5!\,2^5} < \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

נכפול במינוס אחד

$$-\frac{e^c}{5!\,2^5} > -\frac{1}{100}$$

לכן נבחר את a להיות הקירוב באמצעות פולינום הטיילור, והוכחנו שהשגיאה מתאימה

$$a = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4!}$$

(זה פולינום הטיילור של e^x שהצבנו בו $-\frac{1}{2}$)

הערה:

נניח עצרנו בשלב הקודם עם הניחוש ש$n = 3$ ומצאנו a כך ש

$$\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{100} < a < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

האם מכאן היה אפשר לפתור את השאלה בלי לנסות n אחר?

נוסיף לשלושת האגפים $\frac{1}{100}$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} < a + \frac{1}{100} < \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{100}$$

כלומר התשובה שלנו תהיה $a + \frac{1}{100}$