פתרון מבחן מועד ד' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 18/06/23

מרצה: דר' ארז שיינר   משך המבחן: שלוש שעות   חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'   ענו על כל השאלות   כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cdot(1-e^x)}{\cos(3x)-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}\cdot\frac{2}{3^2}=1\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{x}=\left\{\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right\}=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n+n^2}$

$$0<\frac{n!}{n^n+n^2}<\frac{n!}{n^n}$$

לכן לפי סנדוויץ' מספיק להראות שגבול הביטוי מימין שואף לאפס, את זה נעשה עם כלל המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}<1$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד, הסדרה שואפת לאפס וסיימנו.

.2

א. חשבו את $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$.

$$\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = \left\{\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right\} = \int 2t\arctan(t)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} f' = 2t & g = \arctan(t) \\ f = t^2 & g' = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = t^2\arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$\frac{t^2}{1+t^2}$ היא פונקציה רציונאלית.

דרגת המונה שווה לדרגת המכנה לכן נתחיל מחילוק פולינומים, אבל במקום זאת נעזר בטריק שיוביל אותנו לאותו המקום:

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

והביטוי שקיבלנו הוא כבר שבר חלקי, ואין צורך לפרק לסכום של שברים חלקיים.

נחזור לאינטגרל:

$$= t^2\arctan(t) - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) + C =$$

$$= x\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} 2\int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} 2\left[\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} 2 - 2\sqrt{t} = 2$$

.3

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2-1) = 6(x-1)(x+1)$$

זו פרבולה צוחקת, ולכן הנגזרת חיובית בתחומים

$$(-\infty,-1),(1,\infty)$$

ושלילית בתחום

$$(-1,1)$$

וסה"כ הפונקציה הנתונה עולה בתחומים

$$(-\infty,-1],[1,\infty)$$

ויורדת בתחום

$$[-1,1]$$

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}=8x-8$.

ראשית נבצע חילוק פולינומים

$$2x^3+2x-4$$

$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$

$$2x^4+4x^3+2x^2-8|\ x+2$$

$$2x^4+4x^3$$

$$2x^2-8$$

$$2x^2+4x$$

$$-4x-8$$

$$-4x-8$$

$$0$$

סה"כ גילינו כי

$$\frac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}=2x^3+2x-4$$

כעת אחרי ההכנה המקדימה, נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=\frac{2x^4+4x^3+2x^2-8}{x+2}-(8x-8)=2x^3+2x-4-(8x-8)=2x^3-6x+4$$

כעת נחקור פונקציה זו, היא הפונקציה מסעיף א'.

כלומר אנו יודעים את תחומי העלייה והירידה שלה כבר, נותר לבדוק את הערכים בקצוות.

$$\lim_{x\to-\infty}2x^3-6x+4=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x^3}_{\to-\infty}\left(\underbrace{2-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}}_{\to2}\right)=-\infty$$

$$h(-1)=8$$

לכן בתחום $(-\infty,-1]$ לפי ערך הביניים, כיוון שהפונקציה רציפה ויש נקודות מעל ומתחת לציר, יש חיתוך.

כיוון שהפונקציה מונוטונית, יש חיתוך יחיד בתחום זה.

כעת נציב את $x=1$

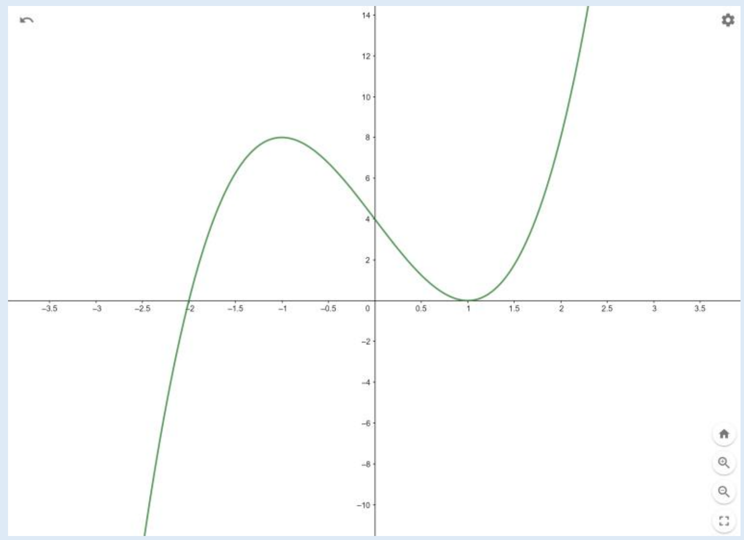
$$h(1)=0$$

ויחד עם המונוטוניות של שני התחומים הנותרים $[-1,1],[1,\infty)$ כיוון שהחיתוך עם הציר הוא בנק' המשותפת לשני התחומים הוא החיתוך היחיד בשניהם גם יחד.

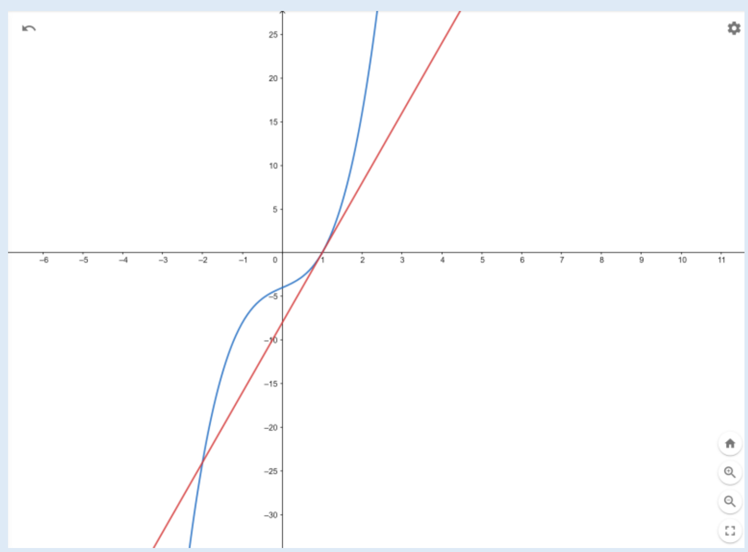
סה"כ שני חיתוכים ולכן שני פתרונות למשוואה המקורית.

קצת ציורים:

הציור של הפונקציה $h(x)$:



שרטוט שתי הפונקציות מצידי המשוואה המקורית:



4. תהי f פונקציה הגזירה בנקודה x_0, ונביט בפונקציה $g(x) = f(|x|)$
   א. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בנקודה x_0.

הפרכה: $f(x) = x$ גזירה ב$x_0 = 0$

ואילו $g(x) = f(|x|) = |x|$ אינה גזירה ב$x_0 = 0$

   ב. הוכיחו או הפריכו: אם $x_0 \neq 0$ אזי הפונקציה $g(x)$ גם גזירה בנקודה x_0.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x) = \sqrt{-x}$ הגזירה בנקודה $x_0 = -1$

לעומת זאת, $g(x) = f(|x|) = \sqrt{-|x|}$ כלל אינה מוגדרת בנקודה $x_0 = -1$.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$, המקיימת כי $a_1 > 1$.
   א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ראשית נשים לב כי

$$a_{n+1} - a_n = a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n}$$

לכן אם נוכיח כי לכל n מתקיים כי $a_n > 1$ נקבל כי ההפרש חיובי והסדרה אכן עולה. נעשה זאת באינדוקציה:

בדיקה: $a_1 > 1$

יהי n עבורו $a_n > 1$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 1$

צריך להוכיח

$$2a_n - \frac{1}{a_n} > 1$$

כיוון שנתון כי $a_n > 1$ מותר לכפול בו בשני הצדדים לקבל אי שיוויון שקול

$$2a_n^2 - 1 > a_n$$

$$a_n^2 - a_n + a_n^2 - 1 > 0$$

$$a_n(a_n - 1) + a_n^2 - 1 > 0$$

וזה אכן נכון לפי הנחת האינדוקציה.

(היה אפשר להראות שאי השיוויון מתקיים גם בעזרת פרבולה, אבל זה מה שקפץ לי לעין.)

ב. חשבו את גבול הסדרה.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא עולה, נסמן גבול זה ב $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - \frac{1}{a_n}$$

כיוון שהסדרה עולה נובע כי $L \geq a_1 > 1$, ולכן בפרט $L \neq 0$ ולכן $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{L}$

סה"כ נקבל כי

$$L = 2L - \frac{1}{L}$$

$$L^2 = 1$$

$$L = \pm 1$$

בסתירה לכך כי $L > 1$

לכן הסדרה <u>אינה חסומה</u>, וכיוון שהיא עולה מתקיים כי $a_n \to \infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

ראשית נציג את הסדרה באמצעות סימן הסכימה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

כעת נפתח את הביטוי לצורה של סכום רימן

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

זו סדרה סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי משפט מתכנסת לאינטגרל המסוים

$$a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2)$$

ב. קרבו את $\sqrt[3]{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נעשה בקירוב טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב נקודת ההשקה המצוייה $x_0 = 0$ בנקודה הרצוייה $x = \frac{1}{3}$ כיוון ש

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

השגיאה היא

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3} - 0\right)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!\,3^{n+1}}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{3}$

כיוון שהפונקציה e^x מונוטונית עולה,

$$0 < e^c < e^{\frac{1}{3}}$$

נחסום מלמעלה על ידי ביטוי מוכר:

$$e^c < e^{\frac{1}{3}} < e < 4$$

(הרי הוכחנו בכיתה כי $2 < e < 4$)

ולכן

$$|R_n| = R_n = \frac{e^c}{(n+1)!\,3^{n+1}} < \frac{4}{(n+1)!\,3^{n+1}}$$

(שימו לב שהשגיאה תמיד חיובית ולכן הערך המוחלט נעלם.)

עבור $n = 3$ נקבל כי

$$R_3 < \frac{4}{4! \cdot 3^4} < \frac{1}{100}$$

לבסוף, פולינום הטיילור של e^x ידוע כמובן:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ולכן

$$\sqrt[3]{e} \approx P_3\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!}$$