תרגיל בית 1 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

שאלה 1. * ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות:
האם היא חבורה למחצה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N},*)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a*b=a+b+a$.

ב. $(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},*)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a*b=a+b+ab$.

ג. $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ד. $(5\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ה. $(\mathbb{R},*)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\sqrt{a+b}$.

ו. תהי X קבוצה. $(P(X),\triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא *ההפרש הסימטרי* המוגדר לכל $A,B\in P(X)$ לפי $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

ז. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$$

ח. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

שאלה 2. ** תהא S חבורה למחצה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו $M=S\cup\{e\}$ עם איבר חדש $e\notin S$ כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של S באופן

כזה ש-e הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

נניח שחוזרים על הבניה הזאת n פעמים, כלומר $M_1 = S \cup \{e_1\}$ ואז $M_2 = M_1 \cup \{e_2\}$ ואז ... $M_n = M_{n-1} \cup \{e_n\}$. עבור $i \leq j$ למה שווה המכפלה e_ie_j? ומה לגבי e_je_i?

תארו את המונואיד M_n אם מתחילים מהחבורה למחצה $S = \{0\}$.

שאלה 3. * יהי M מונואיד, ו $a \in M$ איבר. נגדיר באינדוקציה את פעולת החזקה $a^{n+1} = a^n \cdot a$ כאשר $a^1 = a$.

הוכיחו כי מתקיים:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$ עבור $n, m \in \mathbb{N}$.
2. $(a^n)^m = a^{nm}$ עבור $n, m \in \mathbb{N}$.
3. נניח כי a הפיך, $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

שאלה 4. ** תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2b^2$.

שאלה 5. ** תהי G חבורה. נסמן $m_2 = |\{x \in G : x^2 = e\}|$.

א. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2 \equiv |G| \mod 2$.

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x \neq e$ המקיים $x^2 = e$.

הדרכה לסעיף א': הסתכלו על יחס השקילות הבא על G: $x \equiv y \iff x = y \vee xy = e$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

שאלה 6. * קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם התת קבוצות הבאות הן תת חבורות של החבורות הנתונות או לא:

1. $O_n(F) = \left\{A \in GL_n(F) \,|\, A^T = A^{-1}\right\} \subseteq GL_n(F)$ המטריצות האורתוגונליות.
2. $\{A \in F^{n\times n} \,|\, detA = 0\} \subseteq F^{n\times n}$.
3. עבור חבורה כלשהי G: $\Delta = \{(a, a) \,|\, a \in G\} \subseteq G \times G$.
4. עבור חבורות G_1, G_2 ותתי חבורות H_1, H_2 בהתאמה: $H_1 \times H_2 \subseteq G_1 \times G_2$.

הערה: הפעולה ב $G_1 \times G_2$ היא כפל "רכיב-רכיב" (מה שאתם מדמיינים שזה- אז זה זה).

שאלה 7. * מצאו את לוח הכפל של חבורה מגודל 6 המכילה איברים σ, τ, e המקיימים $\sigma^3 = e,\ \tau^2 = e$ ו $\sigma\tau = \tau\sigma$.
בתור התחלה, שימו לב שכל איבר ניתן לרשום באופן מייצג בצורה $\tau^i\sigma^j$ עבור $i = 0, 1$ ו $j = 0, 1, 2$. בעזרת הנתונים אפשר למצוא את טבלת הכפל המלאה של החבורה.

שאלה 8 (אתגר). ***הוכיחו שאם בחבורה למחצה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש-$c = xa$, ואז $ce = xae = xa = c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

בהצלחה!