שיעורי בית 2

.

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a=\left(\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{array}\right)\in S_6$

(ב) $b=\left(\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{array}\right)\in S_6$

פתרון: $a=(1\,6)\,(2\,5)\,(3\,4),b=(1\,2)\,(4\,5)\,(3\,6)$

(ג) חשבו: $a^2\ ,b^2,bab^{-1},ab$

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך שניים יתקיים $b=b^{-1}$ $a=a^{-1}$.

ואז : $a^2=b^2=e$ $bab^{-1}=bab=(1\,4)\,(5\,6)\,(3\,2)$ $ab=(1\,5\,3)\,(2\,6\,4)$

(ד) כמה תמורות $x\in S_6$ קיימות המקיימות את השיוון $ax=b$? מצאו אותם.

פתרון: נכפיל את השיוון ב a^{-1} משמאל ונקבל כי קיים x יחיד כזה שהוא $x=a^{-1}b$. חישוב מפורש

$$x=a^{-1}b=ab=(1\,5\,3)\,(2\,6\,4)$$

2. תהא $\sigma\in S_n$. ותהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$ לכל k טבעי.

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}$ כי $\tau_1\cdots\tau_m\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1},\ldots,\tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1}=\tau_m^{-1}\cdots\tau_1^{-1}=\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1,\ldots,\tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k=(\tau_1\cdots\tau_m)\,(\tau_1\cdots\tau_m)\cdots(\tau_1\cdots\tau_m)=(\tau_1\cdots\tau_1)\,(\tau_2\cdots\tau_2)\cdots(\tau_m\cdots\tau_m)=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$$

(ג) תנו דוגמא ל$\sigma \in S_n$ שניתן להציגה כמכפלה של מחזורים (לא בהכרח זרים) $\sigma = \tau_1, \ldots, \tau_m$ כך ש:

i. $\sigma^{-1} \neq \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

ii. קיים k טבעי כך ש $\sigma^k \neq \tau_1^k \cdots \tau_m^k$

פתרון: נתסכל על $(1,2,3) = (1,2)(2,3) \in S_3$ מתקיים

$$(1,2,3)^{-1} = (3,2,1) \neq (1,2)^{-1}(2,3)^{-1} = (1,2)(2,3) = (1,2,3)$$

וגם

$$(1,2,3)^2 = (1,3,2) \neq (1,2)^2(2,3)^2 = id$$

.3

(א) הוכיחו פורמאלית כי עבור מחזור $(i_1, \ldots, i_m) \in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m) = (i_1, i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{m-1} i_m)$$

הוכיחו זאת ע"י בדיקה מפורשת כי לכל $x \in \{1, \ldots, n\}$ מתקיים כי

$$(i_1, \ldots, i_m)[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{m-1} i_m)[x]$$

פתרון: נראה ששתי הפונקציות משני צדדי המשוואה שולחות כל $x \in \{1, \ldots, n\}$ לאותו מקום. אכן, יהא $x \in \{1, \ldots, n\}$.
אם $x = i_k$ (לאיזה שהוא $k < m$) אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_k] = i_{k+1} = (i_k, i_{k+1})[x] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{m-1} i_m)[x]$$

כי החילופים זרים (נובע מכך ש $(i_1, \ldots, i_m)$ מחזור).
אם $x = i_m$ אזי

$$(i_1, \ldots, i_m)[i_m] = i_1 = (i_1, i_2)[i_2] = (i_1, i_2)(i_2 i_3)[i_3] = \cdots = (i_1, i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{m-1} i_m)[i_m]$$

אחרת $x \neq i_k$ לכל k ואז

$$(i_1, \ldots, i_m)[x] = x = (i_1, i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{m-1} i_m)[x]$$

כי x מופיע במחזור מאורך 1

(ב) הראו כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים והצגה זאת אינה יחידה.
פתרון: תהא σ תמורה. אזי היא ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \Pi_{i=1}^m \sigma_i$ ולכל i המחזור $\sigma_i = \Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$ ניתן להצגה כמכפלה של חילופים לפי סעיף קודם ולכן גם

$$\sigma = \Pi_{i=1}^m \sigma_i = \Pi_{i=1}^m \Pi_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$$

ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.

דרך נוספת להציג את היא

$$\sigma = \Pi_{i=1}^{m}\sigma_i = \Pi_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{m_i}\tau_{i,j} = \Pi_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{m_i}\tau_{i,j}\,(1,2)\,(1,2)$$

4. הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר $t = \#\{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} :\ i<j, \sigma(j)<\sigma(i)\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. למשל עבור $\sigma=(1,2,3)$ מתקיים כי הזוג הסדור$(1,3)$ הוא היפוך סדר כי $1<3$ וגם $\sigma(1)<\sigma(3)$. גם הזוג הסדור$(2,3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $sgn(\sigma)=(-1)^2=1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.

משפט: תהא $\sigma \in S_n$ תמורה ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים אזי מתקיים

$$sgn(\sigma) = (-1)^m$$

[למשל את $\sigma=(1,2,3)$ ניתן להציג כ $(1,2)\,(2,3)$כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $sgn(\sigma)=(-1)^2$]

(א) תנו דוגמא ל 2 תמורות זוגיות ו 2 תמורות אי זוגיות ב S_5

פתרון: למשל $(1,2,3)=(1,2)\,(2,3)$ ו $(1,2,4)=(1,2)\,(2,4)$ זוגיות

למשל $(1,2,3,4)=(1,2)\,(2,3)\,(3,4)$ ו $(1,2)$ אי זוגיות

(ב) יהא $n>1$נסמן את קבוצת התמורות האי זוגיות ב S_n ב A, נסמן את קבוצת התמורות הזוגיות ב B. הוכיחו כי $|B|=|A|$ ומצאו כמה תמורות זוגיות יש. [הדרכה: הגדירו $F: A \to B$ ע"י $F(\sigma)=(1,2)\,\sigma$ והוכיחו כי F מוגדרת היטב והפיכה]

פתרון: בהינתן תמורה אי זוגית $\sigma \in A$ ניתן להציגה עם מספר אי זוגי n של חילופים ולכן את התמורה $\sigma\,(1,2)$ניתן להציג עם $n+1$ חילופים שזהו מספר זוגי ולכן $\sigma \in B\,(1,2)$ ולכן F מוגדרת. בנוסף אם נגדיר

$$G: B \to A$$

ע"י $G(\sigma)=(1,2)\,\sigma$ אז היא מעביר תמורות זוגיות לתמורות אי זוגיות בדומה ל F. בנוסף מתקיים כי $G=F^{-1}$ כי

$$G \circ F(\sigma) = G(F(\sigma)) = G((1,2)\,\sigma) = (1,2)\,(1,2)\,\sigma = \sigma$$

לכל $\sigma \in A$ וגם באופן דומה $F \circ G(\sigma)=\sigma$ לכל $\sigma \in B$. מכאן ש $|B|=|A|$.

כעת, כיוון ש $S_n = A \cup B$ ו $|S_n|=n!$ נקבל (כיוון שאין איבר משותף ל A ול B) כי $n! = |A|+|B| = 2\,|B|$ ולכן $|B|=\frac{n!}{2}$.

(ג) הוכיחו כי לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ מתקיים כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$

פתרון : יהיו σ_1, σ_2 שתי תמורות. נציג אותם כמכפלה של חלופין

$$\sigma_1 = \tau_1 \cdots \tau_m$$
$$\sigma_2 = \tau_1' \cdots \tau_k'$$

אזי נקבל כי

$$\sigma_1\sigma_2 = \tau_1 \cdots \tau_m \tau_1' \cdots \tau_k'$$

ולכן

$$sgn(\sigma_1\sigma_2) = (-1)^{m+k} = (-1)^m (-1)^k = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$$

5. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \ldots i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma (i_1, i_2, \ldots i_m) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m))$$

למשל $\sigma = (1,2)(4,5)$ מתקיים כי

$$\sigma (2,3,5,6) \sigma^{-1} = (1,3,4,6)$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$(i_1, i_2, \ldots i_m) = \sigma^{-1} (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m)) \sigma$$

יהא $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיוויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.
אם $x \in \{i_1, \ldots i_m\}$ אזי $x = i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1} (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m)) \sigma(i_k) = \sigma^{-1} (\sigma(i_{k+1})) = i_{k+1}$$

(אם $k = m$ אז נחליף את $m+1$ ב־1)

ומצד שני

$$(i_1, i_2, \ldots i_m)(i_k) = i_{k+1}$$

ויש שיוון.
אם $x \notin \{i_1 \ldots i_m\}$ אזי

$$\sigma^{-1} (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m)) \sigma(x) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x$$

התמורה $(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_m))$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x)=\sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x=i_k$ סתירה.
ומצד שני

$$(i_1,i_2,\ldots i_m)(x)=x$$

6. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\ldots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 5 יכול להיות לעזר
פתרון : יהיה $(1,i)$ חילוף. מתקיים
$\tau=\sigma_2\sigma_1=(2,3\ldots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2)=i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1)=1$.
נסמן $\tau'=\tau^{i-2}$ ואזי לפי תרגיל 5 מתקיים $(1,i)=(\tau'(1),\tau'(2))=\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$.

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$
פתרון : מתקיים כי $(i,j)=(1.i)\,(1,j)\,(1.i)$

(ג) הוכח את הטענה.
פתרון : כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:
כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(1,k)\,(1,k')$.
כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.