שאלות לאימון

1. הוכחת תכונות של פונקציות מרוכבות מיוחדות:

(א) הוכיחו: $\forall z\in\mathbb{C}, \sin 2z = 2\sin z\cos z$

פתרון:

$$2\sin z\cos z \;=\; 2\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \;=\; 2\frac{e^{2iz}+e^{0}-e^{0}-e^{-2iz}}{4i} \;= \frac{e^{i2z}-e^{-i2z}}{2i} = \sin(2z)$$

(ב) $\forall z\in\mathbb{C}, \cos z = 2\cos^2 z - 1$

פתרון:

$$2\cos^2 z \;-\; 1 \;=\; 2\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 - 1 \;=\; 2\frac{e^{2iz}+2e^{0}+e^{-2iz}}{4} - 1 \;= \frac{e^{iz}+2+e^{-iz}-2}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(2z)$$

(ג) $\forall z\in\mathbb{C}, \sin(z+\pi) = -\sin z$

פתרון:

$$\sin(z{+}\pi) = \frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{\pi i}-e^{-\pi i}e^{-iz}}{2i} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\frac{(e^{iz}-e^{-iz})}{2i} = \sin z$$

(ד) $\forall z\in\mathbb{C}, \cos(z+\pi) = -\cos z$

פתרון:

$$\cos(z{+}\pi) = \frac{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{\pi i}+e^{-iz}e^{-\pi i}}{2} = \frac{-e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\cos(z)$$

2. חישוב ערכים של פונקציות מרוכבות מיוחדות:

חשבו את הערכים הבאים:

(א) ענף עיקרי של $\ln(2+2i)$

פתרון:

$r=\sqrt{8}, \theta=\frac{\pi}{4}$. $\ln(2+2i) = \ln\sqrt{8}+\frac{\pi}{4}i$

(ב) ענף עיקרי של 4^i

פתרון:

$$4^i = e^{i\ln 4} = \mathrm{cis}(\ln 4)$$

(ג) כל הערכים של $\ln(3i)$
פתרון:
$r = 3, \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. $\ln(3i) = 3 + (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i$

(ד) $e^{2+5\pi i}$
פתרון:
$$e^{2+5\pi i} = e^2 \mathrm{cis}(5\pi) = -e^2$$

(ה) ענף עיקרי של i^{2i}
פתרון:
ראשית, נעשה חישוב עזר: $\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i$ בענף העיקרי. לכן
$$i^{2i} = e^{2i \ln i} = e^{2i(\frac{\pi}{2})i} = e^{-\pi}$$

(ו) הציגו בצורה קרטזית: $e^{\frac{\pi}{4}i}$
פתרון:
$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \mathrm{cis}(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

3. בדיקה של גזירות: בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות. במידה והן גזירות, מצאו את הנגזרת.

(א) $f(x+iy) = e^{x+iy+i}$
פתרון:
$$f(x+iy) = e^{x+i(y+1)} = e^x \mathrm{cis}(y+1) = e^x \cos(y+1) + e^x \sin(y+1)$$
$$U = e^x \cos(y+1), V = e^x \sin(y+1)$$

$$U_x = e^x \cos(y+1)$$

$$U_y = -e^x \sin(y+1)$$

$$V_x = e^x \sin(y+1)$$

$$V_y = e^x \cos(y+1)$$

אכן מתקיים $U_x = V_y, U_y = -V_x$. לכן הפונקציה גזירה, והנגזרת שווה ל:
$$f' = e^x \cos(y+1) + ie^x \sin(y+1)$$

(ב) $f(x+iy)=x^2+iy^2$

פתרון:

$U=x^2, V=y^2$

$U_x=2x, U_y=0, V_x=0, V_y=2y$.

ניתן לראות ש$U_x \neq V_y$ ולכן הפונקציה לא גזירה.

(ג) $f(x+iy)=xe^x\cos y-ye^x\sin y+i(ye^x\cos y+xe^x\sin y)$

פתרון:

$U=xe^x\cos y-ye^x\sin y, V=ye^x\cos x+xe^x\sin y$

$$U_x=e^x\cos y+xe^x\cos y+ye^x\sin y$$

$$U_y=-xe^x\sin y-e^x\sin y-ye^x\cos y$$

$$V_x=ye^x\cos y+e^x\sin y+xe^x\sin y$$

$$V_y=e^x\cos y+xe^x\cos y+ye^x\sin y$$

ניתן לראות ש$U_x=V_y, U_y=-V_x$ לכן הפונקציה גזירה. נגזרתה היא:

$f'=e^x\cos y+xe^x\cos y+ye^x\sin y+i(ye^x\cos y+e^x\sin y+xe^x\sin y)$

(ד) $f(x+iy)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$

$U=\cos(x+y), V=\sin(x+y)$

$$U_x=-\sin(x+y)$$

$$U_y=-\sin(x+y)$$

$$V_x=\cos(x+y)$$

$$V_y=\cos(x+y)$$

ניתן לראות ש$U_x \neq V_y$ ולכן הפונקציה לא גזירה.

4. פתרון מד"רים. מצאו פתרונות כלליים למד"רים הבאים:

(א) $2y'' - y' + 1 = 0$

פתרון:

המשוואה האופיינית היא $2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. הפתרונות שלה הם: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

לכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא $y = c_1 e^x + c_2 e^{-0.5x}$

(ב) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

פתרון:

ראשית, נמצא את הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

המשוואה האופיינית היא: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. יש לה פתרון אחד: $\lambda = -1$. לכן הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא: $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. (H מלשון הומוגנית).

מכיוון שe^{-x} וxe^{-x} הם פתרונות של ההומוגנית, ננחש $y_p = ax^2 e^{-x}$

$y_p' = 2axe^{-x} - ax^2 e^{-x}$

$y_p'' = 2ae^{-x} - 2axe^{-x} - 2axe^{-x} + ax^2 e^{-x}$.

כעת נציב במשוואה:

$(2ae^{-x} - 4axe^{-x} + ax^2 e^{-x}) + 2(2axe^{-x} - ax^2 e^{-x}) + ax^2 e^{-x} = 3e^{-x}$.

$2a = 3$

$a = 1.5$

כלומר, הפתרון הפרטי הוא: $y_p = 1.5x^2 e^{-x}$

והפתרון הכללי: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 1.5x^2 e^{-x}$

(ג) $y'' - 4y' + 4y = 5$

פתרון:

ראשית, נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה:

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda = 2$

הפתרון של ההומוגנית הוא: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

כעת, ננחש פתרון מהצורה: $y = k$ פונקציה קבועה. (כי 5 הוא פולינום ממעלה 1, אז מנחשים פולינום כללי מאותה מעלה)

$4k = 5$

$k = 1.25$

$y = c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + 1.25$

(ד) $y'' + y' + 1 = x^2 + 1$

פתרון:

ראשית, נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה. הפתרונות של המשוואה האופיינית הם: $\lambda = -0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית הוא: $y = c_1 e^{-0.5x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + c_2 e^{-0.5x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x)$

כעת ננחש פתרון פרטי שהוא פולינום מאותה מעלה.

$y_p = ax^2 + bx + c$.

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

נציב במשוואה:

$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 + 1$

$a = 1$

$2a + b = 0$ לכן $b = -2$

$2a + b + c = 1$ לכן $c = 1$

הפתרון הפרטי הוא: $y_p = x^2 - 2x + 1$

והפתרון הכללי: $y = c_1 e^{-0.5x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{-0.5x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + x^2 2x + 1$

(ה) $y' + y = x + 1$

פתרון:

זאת מד"ר לינארית מסדר ראשון. $a(x) = 1, b(x) = x + 1$ לכן $A(x) = x$

$y = e^{-x}[\int e^x(x+1)dx + c] = e^{-x}[\int xe^x dx + \int e^x dx + c]$

$\int xe^x = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x$

לכן $y = e^{-x}[xe^x - e^x + e^x + c] = e^{-x}[xe^x + c] = x + ce^{-x}$

(ו) $y' + \frac{1}{x^2+1} y = 0$

פתרון:

זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון. $a(x) = \frac{1}{x^2+1}$. $A(x) = \arctan(x)$. $y = ce^{-\arctan x}$.