בס"ד

פתרון תרגיל בית 5, גאומטריה אנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

לכסון אורתוגונלי

1. נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ -2 & 4 & 3\\ 6 & 3 & -4\end{pmatrix}$

א. מצאו את הערכים עצמיים של A והריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב כולו מו״ע של המטריצה A.

פתרון

א.

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 6\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=}\begin{vmatrix}5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 4-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2+2R_1\to R_2}{=}}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 6-\lambda & 5\\ 0 & -3 & -10-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6-\lambda & 5\\ -3 & -10-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\left[-(6-\lambda)(10+\lambda)-(-3)\cdot 5\right]$$

$$=(5-\lambda)\left(-60-6\lambda+10\lambda+\lambda^2+15\right)=(5-\lambda)\left(\lambda^2+4\lambda-45\right)=(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+9)=-(\lambda-5)^2(\lambda+9)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=5\,,\ \lambda_3=-9$$

קיבלנו $\lambda_1=\lambda_2=5$ ערך עצמי בעל ריבוי אלגברי 2 ו-$\lambda_3=-9$ ערך עצמי ללא ריבוי (בעל ריבוי אלגברי 1).

כעת נחשב וקטורים עצמים:

<u>עבור</u> $\lambda_1=\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 6\\ -2 & -1 & 3\\ 6 & 3 & -9\end{pmatrix}\underset{R_3+3R_2\to R_3}{\overset{R_1-2R_2\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ -2x-y+3z=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z$$

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\ z=s\,,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_1=\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=2\,,\,s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=0\,,\,s=2$ ונקבל מיד $y=-3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

בסה"כ הריבוי הגיאומטרי של הע"ע הכפול $\lambda_1=\lambda_2=5$ הוא 2.

<u>עבור</u> $\lambda_3=-9$:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{R_3+3R_2\to R_3}{\overset{R_1+5R_2\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 63 & 21 \\ -2 & 13 & 3 \\ 0 & 42 & 14 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{14}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{21}R_1\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3y+z=0 \Rightarrow z=-3y\,,\,-2x+4y=0 \Rightarrow x=2y$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל $x=2\,,\,z=-3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. כאן ריבוי גיאומטרי 1.

בסה"כ המטריצה לכסינה (כצפוי, היא סימטרית!).

ב.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2: $\lambda_1=\lambda_2=5$.

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}-\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+2^2+0^2}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים: $u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$.

$\|w_2\|=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{56}{5}}$ ומכאן: $u_2=\sqrt{\frac{5}{56}}\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{6}{5}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\\frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\2\sqrt{\frac{5}{56}}\end{pmatrix}$

הו״ע השלישי אורתוגונלי מראש לשניים האלו, מכיוון שהו״ע שהתקבלו מע״ע שונים הם אורתוגונלים לפי משפט.

ננרמל גם אותו: $v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

הנורמה היא: $\|v_3\|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$ ומכאן הווקטור המנורמל: $u_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\\-\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$.

מכאן $\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\\frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{56}}\\2\sqrt{\frac{5}{56}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\\-\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי מבוקש.

.2

$$A=\begin{pmatrix}11&-8&4\\-8&-1&-2\\4&-2&-4\end{pmatrix}$$

מצאו מטריצה P אורתוגונלית כך ש- $P^tAP=D$.

<u>פתרון</u>

מציאת ע"ע:
נמצא פולינום אופיני ונשווה אותו לאפס:

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}11-\lambda & -8 & 4\\ -8 & -1-\lambda & -2\\ 4 & -2 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_2+2R_3\to R_2}{=}\begin{vmatrix}11-\lambda & -8 & 4\\ 0 & -5-\lambda & \underbrace{-10-2\lambda}_{=2(-5-\lambda)}\\ 4 & -2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\left(-5-\lambda\right)\begin{vmatrix}11-\lambda & -8 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & -2 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3+2R_2\to R_3}{\overset{R_1+8R_2\to R_1}{=}}\left(-5-\lambda\right)\begin{vmatrix}11-\lambda & 0 & 20\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\left(-5-\lambda\right)\underbrace{\left(-1\right)^{2+2}}_{=1}\left[-\lambda\left(11-\lambda\right)-80\right]=0$$

$$-\left(5+\lambda\right)\left(-11\lambda+\lambda^2-80\right)=0$$

$$-\left(5+\lambda\right)\left(\lambda^2-11\lambda-80\right)=0$$

$$-\left(5+\lambda\right)\left(\lambda-16\right)\left(\lambda+5\right)=0$$

ע"ע: $\lambda_1=16 \quad \lambda_2=-5 \quad \lambda_3=-5$

מציאת וקטורים עצמים:

עבור $\lambda_1=16$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & -8 & 4 & 0\\ -8 & -17 & -2 & 0\\ 4 & -2 & -20 & 0\end{array}\right)\underset{\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & -8 & 4 & 0\\ -3 & -9 & -6 & 0\\ 2 & -1 & -10 & 0\end{array}\right)\overset{\left(-\frac{1}{3}\right)R_2\to R_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & -8 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -10 & 0\end{array}\right)\underset{R_3-2R_2\to R_3}{\overset{R_1+5R_2\to R_1}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 7 & 14 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & -7 & -14 & 0\end{array}\right)$$

$$\overset{R_3+R_1\to R_3}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 7 & 14 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{\frac{1}{7}R_1\to R_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$z=t$$
$$y+2t=0$$
$$y=-2t$$
$$x+2y=0$$
$$x=-2y$$
$$x=4t$$

$$\begin{pmatrix}4t\\-2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=-5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}16&-8&4&0\\-8&4&-2&0\\4&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1+2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\-8&4&-2&0\\4&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\4&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$z=t$$
$$y=s$$
$$4x-2s+t=0$$
$$4x=2s-t$$
$$x=\frac{s}{2}-\frac{t}{4}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{s}{2}-\frac{t}{4}\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$$

נבחר : $t=2$, $s=1$ $\qquad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

נבחר : $t=-4$, $s=0$ $\qquad \overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$

<u>הערה</u>: כיוון שהמטריצה סימטרית בהכרח היא לכסינה אורתוגונלית לפי משפט, לכן אנחנו חיבים למצוא מס' וקטורים עצמים זהה לריבוי האלגברי שלהם.

נקבל שני וקטורים:

$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$$

נשים לב שהם לא אורתוגונלים.
נפעיל תהליך של גראם שמידט:
נסמן:

$$\vec{w_1}=\vec{v_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{w_2}=\vec{v_2}-\frac{\left\langle \vec{v_2},\vec{w_1}\right\rangle}{\left\|\vec{w_1}\right\|^2}\vec{w_1}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}-\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}-\frac{-8}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{8}{5}\\\frac{16}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{8}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

נכפול אותו פי 5 ונקבל:

$$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}5\\8\\-4\end{pmatrix}$$

ננרמל אותם:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{w_1}}{\left\|\overrightarrow{w_1}\right\|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2}=\frac{\overrightarrow{w_2}}{\left\|\overrightarrow{w_2}\right\|}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{105}}\\ \frac{8}{\sqrt{105}}\\ -\frac{4}{\sqrt{105}}\end{pmatrix}$$

נקבל u_1,u_2 אורתונורמלים הם כבר אורתוגונלים ל- v_1 (כי ע"ע שונים).

ננרמל את v_1 בכדי לקבל את P שתהיה אורתוגונלית (עמודות אורתונורמליות):

$$\overrightarrow{u_3}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{21}}\\-\frac{2}{\sqrt{21}}\\\frac{1}{\sqrt{21}}\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0&-\frac{5}{\sqrt{105}}&\frac{4}{\sqrt{21}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{8}{\sqrt{105}}&-\frac{2}{\sqrt{21}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-4}{\sqrt{105}}&\frac{1}{\sqrt{21}}\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

3. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^tAP=D$:

א. $A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$ ב. $A=\begin{pmatrix}-5&1&1\\1&-5&1\\1&1&-5\end{pmatrix}$ ג. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ד. $A=\begin{pmatrix}-4&1&1\\1&-4&1\\1&1&-4\end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>

א. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים :

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס : $|A-\lambda I|=0$:

$$f_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}11-\lambda & 2 & -8\\ 2 & 2-\lambda & 10\\ -8 & 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(11-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2-\lambda & 10\\ 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -8\\ 10 & 5-\lambda\end{vmatrix}-8(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -8\\ 2-\lambda & 10\end{vmatrix}=$$

$$=(11-\lambda)\left[(2-\lambda)(5-\lambda)-100\right]-2(10-2\lambda+80)-8(20+16-8\lambda)=$$

$$(11-\lambda)(\lambda^2-7\lambda-90)-180+4\lambda-288+64\lambda=-\left(\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+\underbrace{1458}_{18\cdot 81}\right)=0$$

מכאן נקבל:

$$\lambda^3-18\lambda^2-81\lambda+\underbrace{1458}_{18\cdot 81}=(\lambda^3-81\lambda)-(18\lambda^2-18\cdot 81)=\lambda(\lambda^2-81)-18(\lambda^2-81)$$

$$=(\lambda^2-81)(\lambda-18)=(\lambda-9)(\lambda+9)(\lambda-18)=0\Rightarrow \lambda_1=9\,,\,\lambda_2=-9\,,\,\lambda_3=18$$

ערכים עצמים שונים, לכן נקבל מכאן 3 ו״ע בת״ל. לפי משפט, מכיוון שהמטריצה סימטרית, הווקטורים העצמים הללו יהיו אורתוגונלים.

נפתור את המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -8\\ 2 & -7 & 10\\ -8 & 10 & -4\end{pmatrix}\underset{R_3+4R_1\to R_3}{\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}}\begin{pmatrix}2 & 2 & -8\\ 0 & -9 & 18\\ 0 & 18 & -36\end{pmatrix}\underset{R_3+2R_2\to R_3}{\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1\to R_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & -9 & 18\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix}x-2z=0\Rightarrow x=2z\\ y-2z=0\Rightarrow y=2z\end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=2$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$ ולכן ו״ע מנורמל: $u_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-9$:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \underset{R_3+4R_2\to R_3}{\overset{R_1-10R_2\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -108 & -108 \\ 2 & 11 & 10 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & -108 & -108 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \overset{R_2+2R_3\to R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 54 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{54}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{2}R_1\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1-\frac{11}{2}R_3\to R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} x-\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}z \\ y+z=0 \Rightarrow y=-z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $y=-1$, $x=\frac{1}{2}$. נקבל ווקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\frac{3}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=18$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \overset{R_3+4R_2\to R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ 0 & -54 & 27 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{54}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{2}R_2\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{R_1+7R_2\to R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -54 & 27 \\ 1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{R_2+8R_3\to R_2}{\overset{R_1+54R_3\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} y-\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}z \\ x+z=0 \Rightarrow x=-z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$. נקבל ווקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\frac{3}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2}=\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$ ולכן ו"ע מנורמל: $\frac{2}{3}\left(-1,\frac{1}{2},1\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

לפי משפט הו״ע המנורמלים מהווים בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ ומכאן מטריצה $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

היא המלכסנת האורתוגונלית, המטריצה האלכסונית הדומה היא $D=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ ומתקיים:

$P^tAP=D$.

ב. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=} -(3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)\cdot\left[-(6+\lambda)\right](-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3+\lambda)(6+\lambda)(-5-\lambda-1)=-(3+\lambda)(6+\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-3\,,\,\lambda_2=\lambda_3=-6$$

נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=-3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\xrightarrow{R_1+2R_3\to R_1}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} x-z=0 \Rightarrow x=z \\ y-z=0 \Rightarrow y=z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נגרמל אותו : $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ ולכן ו״ע מנורמל : $u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים : $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\ ,\ z=s\ ,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=-6$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t-s\\t\\s\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=0\ ,\ s=1$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=1\ ,\ s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי : $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע״ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_2=\lambda_3=-6$.

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נורמל את הוקטורים: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

$\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ומכאן: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $u_i\ ,\ i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו"ע של מטריצה A.

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא:

$D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$.

<u>הערה:</u> אפשר לכפול את w_3 ב-2 בכדי "להפטר מהשברים" ולאחר מכן לנרמל. מגיעים בדיוק לאותה תשובה.

ג. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=} (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda-1) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1+2R_3\to R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} x-z=0 \Rightarrow x=z \\ y-z=0 \Rightarrow y=z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל ווקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ ולכן ו״ע מנורמל: $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\,,\ z=s\,,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $s=1$, $t=0$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $s=0$, $t=1$ ונקבל מיד וקטור עצמי : $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע״ע עם ריבוי אלגברי 2 : $\lambda_2=\lambda_3=1$.

$$w_2=v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים : $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

ומכאן $\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $i=1,2,3$, u_i הם בסיס אורתונורמלי של ו״ע של מטריצה A .

הווקטורים $i=1,2,3$, u_i הם בסיס אורתונורמלי של ו״ע של מטריצה A .

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא:

$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. המטריצה הנתונה היא סימטרית, $A^t=A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ולכן בהכרח לכסינה אורתוגונלית.

תחילה נמצא ערכים עצמיים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2+R_3\to R_1}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2-R_1\to R_2}{=} -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)\cdot\left[-(5+\lambda)\right](-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2+\lambda)(5+\lambda)(-4-\lambda-1)=-(2+\lambda)(5+\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=-5$$

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=-2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_2-R_3\to R_2}{\xrightarrow{R_1+2R_3\to R_1}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $\begin{matrix} x-z=0\Rightarrow x=z \\ y-z=0\Rightarrow y=z \end{matrix}$. נבחר $z=1$ ואז $x=y=1$. נקבל וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ ולכן ו"ע מנורמל: $u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2 = \lambda_3 = -5$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\to}} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכאן מקבלים: $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$.

נסמן את המשתנים החופשיים $y=t\ ,\ z=s\ ,\ t,s\in\mathbb{R}$ ונקבל מרחב עצמי של הע"ע $\lambda_2=\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t-s\\t\\s\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad t,s\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $t=0\ ,\ s=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

נבחר שרירותית $t=1\ ,\ s=0$ ונקבל מיד וקטור עצמי: $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

נבצע תהליך גראם-שמידט (שלב אחד) על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2: $\lambda_2=\lambda_3=-5$.

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נורמל את הוקטורים: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

$\|w_3\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ומכאן: $u_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

הווקטורים $u_i\ ,\ i=1,2,3$ הם בסיס אורתונורמלי של ו״ע של מטריצה A .

לכן המטריצה המלכסנת אורתוגונלית היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ והאלכסונית הדומה היא:

$D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$.